Hamilton 系统的拓扑理论

杨晓松　著

中国科学技术大学出版社

2000·合肥

图书在版编目(CIP)数据

Hamilton 系统的拓扑理论/杨晓松著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2000.8

ISBN 7-312-01192-6

Ⅰ. H…

Ⅱ. 杨…

Ⅲ. 拓扑—动力系统

Ⅳ. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 21454 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

安徽肥西新华印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:850×1168/32　印张:5　字数:130 千

2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—1000 册

定价:10.00 元

前　言

Hamilton 动力系统理论有着悠久而丰富的历史，它本身是 Lagrange 力学的升华与推广，从数学角度看又是一门内容精深的相空间几何学，如辛几何、辛拓扑等都源于此．近几十年来，随着纯数学理论的不断发展与计算机的普遍应用，Hamilton 动力系统理论又成为当今非线性科学中极其活跃而富有魅力的研究领域，不同背景的科学家、数学家纷纷投身于该领域．此外，Hamilton 动力系统理论的发展又为一般动力系统理论的发展提供了强大的推动力，使动力系统理论成为当今主流理论之一．1994 年国际数学家大会 Fields 奖的颁发无可争议地说明了这个事实．

当今 Hamilton 动力系统理论的发展为各种纯数学理论提供了用武之地，其中数论与拓扑学更是大大促进了人们对 Hamilton 动力系统的认识，本书所探讨的 Hamilton 系统的拓扑理论正是在这种背景下发展起来的．尽管人们很早就运用拓扑思想处理动力学问题，但 Hamilton 动力系统的拓扑理论却很年青．虽然早在 20 世纪 70 年代，美国著名数学家 Smale 在其奠基性论文《拓扑与力学》中就倡导有关的拓扑理论研究，但直到 80 年代末才由前苏联的一个数学家群体将 Smale 的想法贯彻实施．到目前为止，从事该领域研究的基本上是以 Fomenko 为首的俄罗斯（前苏联）学派和少数西方的学者．

本书主要是为具有拓扑、微分几何与辛几何背景的物理学或力学方面的学者和对应用感兴趣的拓扑或几何学家写的，考虑本书的读者对象，我们基本上着重介绍基本概念和思想，而除非能给

出简短证明，否则将复杂的证明略去不提，对证明感兴趣的读者可查阅书后的参考文献. 由于本书的后半部分涉及的大多是我自己的工作，故证明讨论比较详细. 本书的主要内容大致如下：首先简述一下准备知识，其中数学方面包括微分流形、微分形式、Riemann几何、辛几何、同调群、基本群等基本知识，Hamilton 力学方面有 Liouville 可积性、Bott 积分及动量映射等. 在准备工作之后，先讨论（主要是 2 个自由度的）可积 Hamilton 系统能量面的拓扑，其内容包括辛流形上可积 Hamilton 系统的若干基本概念和基本性质、可积 Hamilton 系统能量面的拓扑及其与稳定周期解个数的下界的关系、圆 Morse 函数与能量面的拓扑等. 接下来讨论一般（可积与不可积）Hamilton 系统的拓扑，首先建立了向量丛诱导的奇异丛的拓扑理论，然后运用有关理论讨论自然 Hamilton 系统能量面的拓扑及有关整体 Poincaré 截面的存在性问题. 最后，我们介绍了 Maupertuis-Jacobi 原理及其在 Hamilton 系统中的应用，讨论了 Riemann 流形上曲率对测地流可积性的影响，及其在当今热门领域混沌动力学中的应用.

由于 Hamilton 系统的拓扑理论是一个全新的有待发展的领域，再加上著者的学识和时间所限，书中的错误与不足在所难免，敬候读者朋友们指正.

杨晓松

1999 年 6 月 15 日

目　次

第1章　准备知识

本章将简略介绍一下后面讨论所需的准备知识，有关的详细讨论可参考相应的教科书（见书后参考文献）.

1.1　微分流形

流形

所谓流形，直观地说，就是局部看起来同欧氏空间一样的一个集合或几何对象. 比如地球的表面，每一局部小块粗略地看起来像一块平地，但整体看起来就是一个球面，故可认为这是一个2维流形. 如果一个流形上赋予了一定的光滑结构，那么这个流形就是一个微分流形. 空间解析几何中的球面、环面等大多数曲面都是（2维）微分流形. 为明确起见，下面给出微分流形的数学定义.

设M是一满足Hausdorff分离公理的拓扑空间（在实际讨论中，还要求M满足第二可数公理）. (U,φ)称为M的一个局部坐标卡（或一个局部坐标系），如果U是M的一个开集，φ是U到R^n中开集$\varphi(U)$的一个同胚映射.

M的两个图卡(U_1,φ_1)和(U_2,φ_2)称为c^r相容的，如果$U_1\cap U_2=\varnothing$，或者$U_1\cap U_2\neq\varnothing$，并且坐标变换

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap U_2)\to\varphi_2(U_1\cap U_2)$$

以及

$$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}:\varphi_2(U_1\cap U_2)\to\varphi_1(U_1\cap U_2)$$

都是c^r（即r次连续可微）映射.

M 的一族局部坐标卡 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 称为一个 c^r 图册，如果下述条件成立：

(1) 开集族 $\{U_\alpha\}$ 覆盖 M；

(2) $\mathscr{D}$ 中任意两个图卡都 c^r 相容.

M 的一个 c^r 图册 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 被称为极大的，如果除条件(1)、(2)外还满足条件：

(3) 与 $\mathscr{D}$ 中各局部坐标卡 c^r 相容的任一局部坐标卡 (U,φ) 都属于 $\mathscr{D}$.

M 上的一个极大 c^r 图册 $\mathscr{D}$ 称为 M 上的一个 c^r 结构，M 连同一个 c^r 结构一起称为 c^r 流形. 当 $r\geqslant 1$ 时，统称为微分流形. 一个 c^∞ 流形又叫光滑流形. 由于局部坐标卡 (U,φ) 是以欧氏空间 R^n 为基准的，故 n 称为 M 的维数，记为 $\dim M=n$，M 叫做 n 维可微流形.

子流形

设 M 是 c^r 流形，$\dim M=n$，$N\subset M$ 是 M 的一个子集. 如果对任一点 $x\in N$，存在 M 的局部坐标卡 (U_x,φ_x)，使得 $x\in U_x$，并且有

$$\varphi_x(U_x\cap N)=\varphi_x(U_x)\cap(R^s\times 0),$$

那么 N 被称作 M 的 s 维子流形.

有边流形

我们知道，在前面所给的微分流形 M 的定义中，所给的图卡是以标准的欧氏空间 R^n 为基准的. 若将标准欧氏空间 R^n 改为半空间

$$R^n_+=\{(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in R^n\,|\,x^n\geqslant 0\},$$

而其它条件不变，我们就得到有边微分流形的定义. 此时，M 的边界是如下点 y 的集合：

存在 M 上的图卡 (U,φ)，$y\in U$，使得

$$\varphi(y) \in \{(x^1, x^2, \cdots, x^n) \in R^n_+ \mid x^n = 0\}.$$

设 M 的边界为 ∂M，易见其本身是 $n-1$ 维无边流形.

切空间与切丛

设 M 是一个 n 维 c^r 流形，其上一点 x 的切空间乃是曲线上一点处的切线以及曲面上一点处的切平面在高维情形下的推广. 可直观地说明如下：

设 M 已嵌入到一欧氏空间 R^m 中，对于任意一个 c^r 曲线

$$\alpha(t) \subset M, \quad \alpha(0) = x \in M,$$

其速度向量

$$v_x = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t}$$

称作 M 在 x 点处的一个切向量，所有这种切向量的全体就构成了 M 在 x 点处的切空间 TM_x. 易见这是一个 n 维向量空间.

切空间也可内蕴地定义如下：

设有曲线 $\alpha:(-1,1) \to M$ 与曲线 $\beta:(-1,1) \to M$ 满足 $\alpha(0)=\beta(0)=x \in M$，并且在 M 的某个局部坐标卡 (U_x, φ_x) 中有

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_x \circ \alpha(t) - \varphi_x \circ \beta(t)}{t} = 0,$$

则称 α 与 β 在 x 处相切. 易见这种相切是一等价关系，而且不依赖于局部坐标卡的选择.

定义 1.1　流形 M 在点 x 处的切向量就是满足 $\alpha(0)=x$ 的曲线 $\alpha:(-1,1) \to M$ 在相切意义下的一个等价类. 易见，所有在 x 点处的这种曲线的等价类的全体构成一个向量空间 TM_x，TM_x 称为 M 在 x 点处的切空间.

M 在其各点处的切空间的并 $TM = \bigcup_{x \in M} TM_x$ 就称为 M 的切丛. 易见 TM 有一个自然的微分流形构造，故是一个 $2n$ 维微分流形. TM 的局部坐标卡可如下构造：设 (U_x, φ_x) 是 M 在点 x 的邻域

中的一个局部坐标卡，φ_x 在 U_x 中的局部坐标记为 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，而 $\zeta=(\zeta^1,\zeta^2,\cdots,\zeta^n)$是切向量在此坐标系下的分量．则$(x,\zeta)$给出 TM 的一个局部坐标系表示，自然投影 $p:TM\to M$ 定义为

$$p(x,v)=x,\quad x\in M, v\in TM_x,$$

故 $p^{-1}(x)=TM_x$，并称之为 TM 在点 x 上的纤维．因此，切丛的纤维本质上是欧氏空间 R^n.

切丛的概念可推广到一般向量丛上去.

c^r 可微映射

令 $f:M\to N$ 是 c^r 微分流形 M 到 c^r 微分流形 N 的映射．对任一点 $x\in M$，考虑点 x 处的局部坐标卡(U_x,φ_x)与点 $f(x)\in N$ 处的局部坐标卡$(V_{f(x)},\psi_{f(x)})$，若映射

$$A=\psi_{f(x)}\circ f\circ\varphi_x^{-1}(y):U_x\to V_{f(x)}$$

是一个 c^r 映射，即 A 的分量都是 c^r 可微函数，那么 f 称为 c^r 可微映射.

此外，f 还诱导出 $x\in M$ 处的切空间到 $f(x)\in N$ 处的切空间之间的线性映射

$$f_{*x}:TM_x\to TN_{f(x)},$$

其定义方式如下：

令 $v\in TM_x$，$\alpha:(-1,1)\to M$ 是一可微曲线，$\alpha(0)=x$，且 $\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v$，则 $f_{*x}v\in TN_{f(x)}$定义为

$$f_{*x}v=\left.\frac{\mathrm{d}f(\alpha(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

微分同胚

设 M 与 N 是 c^r 微分流形，$f:M\to N$ 是 c^r 可微映射，若存在 c^r 可微映射 $g:N\to M$，使得

$$f \circ g: N \to N,$$
$$g \circ f: M \to M$$

分别是 N 与 M 上的恒同映射，则称 f 是 c^r 微分同胚. 特别地，若 f 是光滑映射(即 c^∞ 映射)，则称 f 为光滑同胚.

显然，对于微分同胚 $f:M\to N$，映射

$$f_{*x}: TM_x \to TN_{f(x)}$$

是同构.

切向量场

设 M 是一个光滑流形，TM 是 M 的切丛，则 M 上的一个 c^r 切向量场乃是一个 c^r 映射 $v:M\to TM$. 具体地说，就是对某一点 $x\in M$，取定一个 x 处的切向量 $v(x)$，并且 v 是 M 上的 c^r 函数，则在局部坐标系$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$下，M 上的向量场 v 可表示为

$$v(x) = v^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n},$$

其中，$v^j(x)$是 c^r 可微函数.

梯度场

令 M 是一个光滑流形. 在 M 上选定一个 Riemann 度量(见 1.3 节)，以$\langle X,Y\rangle_p$ 表示在点 $p\in M$ 处两切向量 X,Y 在给定 Riemann 度量下的内积. M 上一光滑函数 f 的梯度场是由如下恒等式定义的切向量场 grad f:

$$\langle X,\operatorname{grad} f\rangle = Xf = \mathrm{d}f(X), \quad \forall\, X \in TM_p, \forall\, p \in M.$$

在 M 是普通欧氏空间的情况下，grad f 可表示为

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n},\end{aligned}$$

这里，$\frac{\partial}{\partial x^i}$表示 x^i 坐标方向上的单位向量.

流

令 M 是紧致光滑闭流形，$\mathrm{Diff}^r(M)$是 M 上所有 c^r 微分自同胚组成的集合. 设 $\varphi_t: R\to \mathrm{Diff}^r(M)$是一单参数微分同胚群，且满足：

$$\varphi_{t+s}(x)=\varphi_t\circ\varphi_s(x),\quad \forall\, x\in M, t,s\in R,$$
$$\varphi_0(x)=x,\quad \forall\, x\in M,$$

那么称 φ_t 是 M 上的流.

M 上的流 $\varphi_t: M\to M$ 定义了 M 上的一个切向量场：

$$X(x)=\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_t(x)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},$$

在 M 是紧致无边的情形下，由常微分方程的理论知，M 上任一光滑切向量场也生成 M 上的一个流，即微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=X(x(t)),\quad x(0)=x_0,\quad x_0\in M$$

的积分曲线.

1.2 微分形式

数学家 Arnold 有一句名言："不懂微分形式就不能理解 Hamilton 力学. "本节就简单介绍一下微分形式的基本概念.

1-形式

一个 1-形式(一次形式)乃是一个线性函数 $\omega: R^n\to R$，其中

$$\omega(ax+by)=a\omega(x)+b\omega(y),\quad a,b\in R, x,y\in R^n.$$

由线性代数知，R^n 上的 1-形式构成的空间也是 n 维线性空间，称为 R^n 的对偶空间，记为$(R^n)^*$.

在 R^n 上给定一线性坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$，每个坐标 x^i 都定义了一个 1-形式：

$$x^i(v) = \text{向量 } v \text{ 在 } x^i \text{ 坐标上的分量},$$

这 n 个 1-形式线性无关，从而每个 R^n 上的 1-形式都可表示为

$$\omega = a_1x^1 + \cdots + a_nx^n, \quad a_j \in R.$$

2-形式

一个 2-形式就是一个双线性斜对称函数 $\omega^2: R^n \times R^n \to R$，其中

$$\omega^2(ax + by, z) = a\omega^2(x,z) + b\omega^2(y,z),$$
$$\omega^2(x,y) = -\omega^2(y,x),$$
$$\forall a,b \in R, x,y,z \in R^n.$$

设 R^n 上的线性坐标系为$(x^1,\cdots,x^n)$，则 R^n 上的每一个 2-形式都可唯一表示为

$$\omega^2 = \sum_{i<j} a_{ij}x^i \wedge x^j,$$

其中，$\wedge$ 表示外积，其含义如下.

1-形式之间的外积

设 R^n 上给出两个 1-形式 ω_1 和 ω_2，则外积 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 定义为

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1,v_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) \end{vmatrix}, \quad \forall v_1,v_2 \in R^n.$$

易见 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是 $R^n \times R^n$ 到 R 上的一个双线性斜对称函数，因此是一个 2-形式.

直观地说，对于向量对(v_1,v_2)，$\omega_1 \wedge \omega_2$ 在(v_1,v_2)处的值正是以 v_1,v_2 为边的有向平行四边形与以 ω_1,ω_2 为边的有向平行四边形的某种“内积”.

关于 k-形式及其高次形式的外积，可参考有关教科书.

1-微分形式(1阶微分形式)

令 M 为一个微分流形,M 上的1-微分形式乃是切丛到实数集的可微映射

$$\omega: TM \to R,$$

对每个点 $x \in M$,限制

$$\omega_x: TM_x \to R$$

都是线性映射.

设 $f: M \to R$ 是一可微函数,则 df_x 是 TM_x 上的1-形式,从而是 M 上的1-微分形式.

设 R^n 的坐标系为 $(x^1, \cdots, x^n)$,则 R^n 上的微分 $dx^1, \cdots, dx^n$ 都是1-微分形式,且线性无关. 进一步,若 ω 是 R^n 上的一个1-微分形式,则 ω 可唯一表示为

$$\omega = a_1(x)dx^1 + \cdots + a_n(x)dx^n,$$

其中,$a_i(x)$ 是相应的可微函数.

注意,微分形式是同微分流形的切空间紧密关联的,是定义在切丛上的形式.

2-微分形式

微分流形 M 上的2-微分形式 ω^2 是这样一种微分形式,对于每点 $p \in M$,ω_p^2 都是 TM_p 上的2-形式,即 $\omega_p^2: TM_p \times TM_p \to R$ 是双线性斜对称函数.

设 (U, φ) 是 M 的一个局部坐标卡,则 ω^2 可局部唯一地表示为

$$\omega^2 = \sum_{i<j} a_{ij}(\varphi^{-1}(x))dx^i \wedge dx^j.$$

微分形式的微分

设 f 是微分流形 M 上的可微函数,则 f 是0-微分形式,其微

分 $\mathrm{d}f$ 是 1-微分形式，在 M 的局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$下有表达式

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n.$$

设 f 如上，ω 是 M 上的 1-微分形式，则 $f\omega$ 的微分定义为

$$\mathrm{d}(f\omega)=\mathrm{d}f\wedge\omega+f\mathrm{d}\omega.$$

特别(可证明 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}^2\omega=0$)有

$$\mathrm{d}(f\mathrm{d}x^i)=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^i.$$

1.3 Riemann 度量与曲线长度

为了后面的需要，本节介绍一下 Riemann 几何的一些基本概念. 关于微分几何方面具有深度的入门读物，我们推荐陈省身等人的书[1]与伍鸿熙等人的书[4].

Riemann 度量是欧几里德空间上长度到一般流形上"长度"的一个自然推广. 首先让我们看一个例子.

考虑欧氏空间 R^3，设其坐标系为(x,y,z)，则 R^3 中任一曲线 $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$的长度为

$$\int\mathrm{d}s=\int(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

设 $c(t)$是 R^3 中以原点为中心的单位球面 S^2 上的曲线，则在球坐标系(θ,φ)下，$c(t)$可表示为

$$c(t)=(\cos\theta(t)\cos\varphi(t),\cos\theta(t)\sin\varphi(t),\sin\theta(t)),$$

其无穷小长度为

$$(\theta'^2+\cos^2\theta\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

于是，在球坐标系(θ,φ)下的微分表达式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\theta^2+\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

给出了度量 S^2 上曲线长度的一个方式，从而得到 S^2 的一个 Riemann度量.

现在我们给出微分流形 M 上 Riemann 度量的一般(整体)定义.

Riemann 度量

定义 1.2 给定一微分流形 M,令 S^2T^*M 为 M 上由对称的双线性 2-形式构成的丛,则 S^2T^*M 上一个光滑正定的截面 g 称为 M 上的一个度量,并称(M,g)为一 Riemann 流形.

此定义比较抽象,利用局部坐标卡来描述 Riemann 度量较为直观. 设$(x^1,\cdots,x^n)$是围绕 M 中一点 p 的局部坐标卡,$\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$是相应的一组坐标向量场,命 $U,V\in TM_p$,则 U,V 可表示为

$$U=\sum_{i=1}^{n}u^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

与

$$V=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p,$$

于是

$$g_p(U,V)=\sum_{i,j}g_{ij}(p)u^iu^j,$$

其中

$$g_{ij}(p)=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p,\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right).$$

由此,g 可在局部坐标卡下表示为

$$g=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,$$

或简单地表示成

$$g=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

此表达式是 Riemann 度量的经典定义,注意,此时矩阵(g_{ij})是正

定对称的.

关于流形上 Riemann 度量的存在性问题,有如下经典结果:

定理 1.1 n 维光滑(微分)流形上必有 Riemann 度量.

我们已经知道,Riemann 度量在局部坐标卡下有上述表达式,一个自然的疑问是,g 在不同的局部坐标卡下表达式之间的关系如何? 下面的结果回答了这个问题.

命题 1.1 设(U,φ_u)与(V,φ_v)是 M 中围绕一点 x 的局部图卡,其坐标分别分$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 令 Riemann 度量 g 对应于$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的局部表示分别为

$$g = \sum_{k,l} g_{kl} \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l$$

与

$$\widetilde{g} = \sum_{i,j} \widetilde{g}_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

那么有

$$\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right),$$

即

$$\widetilde{g}_{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}.$$

根据 Riemann 度量的整体定义,我们知道 g 应该与局部坐标卡的选取无关,上面这个命题则具体地说明了这一点.

曲线的长度

令 $c:[0,a]\to M$ 是一条分段 c^1 类曲线,即存在$[0,a]$的一个分划 $f0=a_0<a_1<\cdots<a_n=a$,使得 c 在$[a_i,a_{i+1}]$上是 c^1 类的,则 c 的长度定义为

$$L(c) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |c'(t)|\mathrm{d}t,$$

其中，$|c'(t)|=\sqrt{g(c'(t),c'(t))}$.

1.4 联络与测地线

设 M 是一个光滑流形，我们来回顾一下联络的概念.

联络

M 上的一个联络是一个函数 D，对 M 上每一对光滑向量场 V 与 X，指定 M 上一个新的光滑向量场 D_VX，使得下列性质成立：

(1) $D_{fV+gW}X=fD_VX+gD_WX$；

(2) $D_V(fX)=(D_Vf)X+fD_VX$；

(3) $D_V(X+Y)=D_VX+D_VY$，

其中，W,Y 也是 M 上的光滑向量场，f,g 是 M 上的光滑函数.

对于给定的联络 D，人们称向量场 D_VX 为 X 沿 V 的协变导数. 联络 D 实际上是欧氏空间中方向导数在微分流形上的一种推广.

现在设 (M,g) 是一 Riemann 流形，则关于联络有下面的命题：

命题 1.2 M 上有唯一的联络 D 满足条件：对 M 上任意向量场 X,Y,Z，有

(1) $Xg(Y,Z)=g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ)$；

(2) $D_XY-D_YX-[X,Y]=0$，

其中，[,]是 Poisson 括号.

定义 1.3 满足命题 1.2 的联络称为关于 g 的 Riemann 联络或 Levi-Civita 联络.

设 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是 M 的某个局部坐标卡，则 M 上的 Riemann 联络 D 可局部地表示为

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

其中

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

而(g^{ij})表示逆矩阵$(g_{ij})^{-1}$.

因此，若 X,Y 在局部坐标卡$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$下有形式

$$X = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$Y = \sum_i h^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

则有

$$D_X Y = \sum_{i,j} f^i \left(\frac{\partial h^j}{\partial x^i} + \sum_l h^l \Gamma_{il}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

测地线

设 M 是 Riemann 流形，D 是 M 上的 Riemann 联络，一光滑曲线 $c:[0,1]\to M$ 是一条测地线，当且仅当 c 满足

$$D_{\dot{c}}\, \dot{c} = 0,$$

其中，$\dot{c}$表示 c 对参数的导数.

在局部坐标卡$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$下，设测地线 c 有表达式

$$c(t) = (x^1(t),\cdots,x^n(t)),$$

则 c 满足 2 阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{j,k} (\Gamma_{jk}^i \circ c(t)) \frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}x^k(t)}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$i = 1,2,\cdots,n.$$

由常微分方程解的存在性与唯一性定理可推知，关于测地线有如下结论：

命题 1.3 对 Riemann 流形 M 上的每一点 x，存在 x 的一个

邻域 U 和一个正数 ϵ,使得对每个 $p\in U$ 和每个长度小于 ϵ 的切向量 $V\in TM_p$,存在唯一一条测地线

$$c_v:(-2,2)\to M$$

满足条件

$$c_v(0)=p,\quad \frac{\mathrm{d}c_v}{\mathrm{d}t}=V.$$

关于测地线,还有如下命题:

命题 1.4　对 Riemann 流形 (M,g) 中每一点 $p\in M$,存在一个 p 的邻域 W 和一个正数 $\epsilon>0$,使得下列性质成立:

(1) W 中任何两点都可用 M 中唯一一条长度小于 ϵ 的测地线连结起来;

(2) 该测地线光滑地依赖于这两个点;

(3) 若设

$$c:[0,1]\to M$$

是连结 W 中两点的长度小于 ϵ 的测地线,而

$$b:[0,1]\to M$$

是连结该两点的任一条逐段光滑曲线,则有

$$\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t,$$

其中

$$\left|\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{g\left(\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right)}.$$

由上面命题 1.4 中的性质(3)知,测地线是 W 中连结已给两点的长度最短的曲线. 由于这个缘故,c 也被称为短程线.

例 1.1　对于通常的欧氏空间 R^n,设其坐标系为 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$,则普通的 Riemann 度量为

$$g=\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^1+\cdots+\mathrm{d}x^n\otimes\mathrm{d}x^n,$$

从而有 $\Gamma_{ij}^k=0$,于是测地线方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

由此看出,此时测地线是一直线,这同欧氏空间中两点间连线直线最短的常识相吻合.

例 1.2 读者自己可以证明:1.3 节中的球面 S^2 在 Riemann 度量 $g=\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta+\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi$ 下,其上的测地线是 S^2 上的大圆.

设 $r(t):[a,b]\to M$ 是 Riemann 流形(M,g)上的一段光滑曲线,考虑长度泛函

$$L(r) = \int_a^b [g(\dot{r}(t),\dot{r}(t))]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

微分几何中有如下断言:

命题 1.5 曲线 $r(t)$是测地线当且仅当 $r(t)$是泛函 L 的一个临界点,即 L 的一个驻点.

测地流

现在我们回顾一下测地流的概念.

设 M 是一 n 维 Riemann 流形,而 $r(t)$是 M 上过任一点 $x_0=r(0)$、且切线为 $\dot{r}(0)=v$ 的测地线,v 是 $TM_{r(0)}$中任一满足 $\|v\|=1$ 的向量,则

$$(r(t),v(t))$$

定义了 TM 中单位球面丛 Σ^{2n-1}上的一个动力系统,即一个单参数微分同胚群,称为 M 上的测地流,这里

$$v(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|}.$$

由此定义知,M 上测地线渐近性态的研究可以视为在单位球面丛 Σ^{2n-1}中测地流的研究.

1.5 曲率与 Jacobi 场

给定一个 Riemann 流形(M,g)，设 D 是与 g 相应的 Riemann 联络.

给定(M,g)上的向量场 X,Y 和 Z，我们可通过一个关系 R 定义一个新的向量场 $R(X,Y)Z$ 如下：

$$R(X,Y)Z = -D_X(D_YZ) + D_Y(D_XZ) + D_{[X,Y]}Z.$$

容易证明下述命题：

命题 1.6 $R(X,Y)Z$ 在点 $p\in M$ 的值仅依赖于 p 点处的向量 X_p,Y_p 和 Z_p，与向量场在邻近点的值无关，并且关系

$$R_p:\ (X_p,Y_p,Z_p) \to R(X_p,Y_p)Z_p$$

对于每一分量而言都是线性的. 换言之，上述关系定义了一个 $TM_p\times TM_p\times TM_p$ 到 TM_p 的三线性关系，从而 R 是一个张量.

在局部坐标卡$(x^1,\cdots,x^n)$下，若设

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$Y = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$Z = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

则有

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k} f_i g_j h_k R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

曲率张量

设 Y^* 是 M 上光滑向量场组成的集合(准确地说，是光滑向量场按c^∞函数的代数所得到的模)，则由上述关系 R 定义了一个

映射

$$Y^* \times Y^* \times Y^* \times Y^* \to c^\infty(M),$$
$$R(X,Y,Z,W) \stackrel{\text{def}}{=} g(R(X,Y)Z,W),$$

其中,X,Y,Z,W 是 M 上的光滑向量场,g 是 M 上的 Riemann 度量,$c^\infty(M)$是 M 上光滑函数组成的集合.

在局部坐标卡$(x^1,\cdots,x^n)$下,若记

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$Z = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$W = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

则 $R(X,Y,Z,W)$可表示为

$$R(X,Y,Z,W) = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}\alpha_i\beta_j\psi_k\eta_l,$$

其中

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}\right) \\ &\quad + \sum_{r,s}(g_{rs}\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{il} + g_{rs}\Gamma^r_{jl}\Gamma^s_{ik}). \end{aligned}$$

在 Riemann 几何中,$R(X,Y,Z,W)$称作曲率张量,这显然是一个(0,4)型张量场.

可以证明,关系 R 满足下列 4 个关系:

命题 1.7　一个 Riemann 流形(M,g)的曲率张量满足

(1) $R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0$;

(2) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$;

(3) $g(R(X,Y)Z,W)+g(R(X,Y)W,Z)=0$;

(4) $g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$.

截面曲率

下面我们回顾一下截面曲率的概念.

设 TM_x 是在 Riemann 流形 (M,g) 上一点 $x\in M$ 处的切空间, N_x 是 TM_x 的一个2维子空间,设 $\{v_1,v_2\}$ 是 N_x 的任意一组基,则 N_x 的截面曲率定义为

$$K(N_x)=\frac{R(v_1,v_2,v_1,v_2)}{g(v_1,v_1)g(v_2,v_2)-g^2(v_1,v_2)}.$$

由上面的等式可见, $K(N_x)$ 与 N_x 的基 $\{v_1,v_2\}$ 的选取无关.

特别地,对于2维 Riemann 流形而言,人们也称上述截面曲率为 Gauss 曲率. 易见,此时 Gauss 曲率是 M 到 R 的一个光滑函数,记 $K(N_x)=K(x)$.

关于 Gauss 曲率,有下面著名的 Gauss-Bonnet 公式:

命题 1.8　设 $\chi(M)$ 表示2维 Riemann 流形 (M,g) 的 Euler 示性数(见1.12节),则有等式

$$\chi(M)=\frac{1}{2\pi}\int_M K(x)\mathrm{d}v_g.$$

由此公式可知,2维 Riemann 流形 (M,g) 上的 Gauss 曲率函数 $K(x)$ 在 M 上的平均值与 M 的拓扑有关.

关于 n 维 Riemann 流形 M 上的曲率与 M 上测地流的关系,有下面的经典结果:

定理 1.2(Anosov 定理)　设 M 的截面曲率为负, g^t 是 M 上的测地流,于是 M 上的单位球面丛 Σ^{2n-1} 是 g^t 的相空间. g^t 在 Σ^{2n-1} 中具有如下性质:

(1) 几乎(即除去一个测度为零的子集外) Σ^{2n-1} 中每一点 x 的轨道 $g^t(x)$ 都在 Σ^{2n-1} 中稠密;

(2) 几乎每一轨道 $g^t(x)$在 Σ^{2n-1}中任一区域停留的时间正比于该区域的测度与 Σ^{2n-1}的测度之比；

(3) g^t 具有混合性质：若 $A\subset\Sigma^{2n-1}$，$B\subset\Sigma^{2n-1}$，则有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Mes}[g^t(A)\cap B]=\mathrm{Mes}\ A\cdot\mathrm{Mes}\ B,$$

其中，Mes 表示测度.

Jacobi 场

设 $r(t)$是 n 维 Riemann 流形(M,g)上的一条测地线，在刻画 $r(t)$邻近的测地线与 $r(t)$之间的接近程度或分离程度时，人们得到了 Jacobi 场的概念.

定义 1.4 设 $J(t)$是沿测地线 $r(t)$的向量场，$V=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，如果 $J(t)$满足

$$\frac{\mathrm{D}^2J}{\mathrm{d}t^2}+R(V,J)V=0,$$

那么 $J(t)$称为沿测地线 $r(t)$的 Jacobi 场.

显然，这是一个 2 阶线性常微分方程，称为 Jacobi 方程.

我们说一向量场 $P(t)$是沿 $r(t)$的平行向量场，如果 $P(t)$满足

$$D_{\dot r(t)}P(t)=0.$$

设 $P_1(t),\cdots,P_n(t)$是沿 $r(t)$的彼此正交的单位平行向量场，并设

$$J(t)=\sum_{i=1}^{n}f^iP_i(t),$$

那么 Jacobi 方程变成

$$\frac{\mathrm{d}^2f^i}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)f^j(t)=0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中

$$a_j^i=g(R(V,P_j)V,P_i),\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

由此可见，$r(t)$上的 Jacobi 向量场由初始条件

$$J(0), \quad \frac{\mathrm{D}J(0)}{\mathrm{d}t} \in TM_{r(0)}$$

唯一确定.

Jacobi 场的 Lyapunov 指数

为了刻画测地线 $r(t)$的性态特征,人们又引进了 Jacobi 场的 Lyapunov 特征指数概念,具体如下:

定义 1.5 设 $J(t)$是沿测地线 $r(t)$的 Jacobi 场,则 J 的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}(\max_{|t|<T} \max_{\|J(0)\|=1} \ln|J(t)|).$$

一个测地线上的 Lyapunov 指数如果是正的,则意味着附近的测地线以指数函数的形式分开.

显然,如果(M,g)的截面曲率为负,则必有 $J(0)\in TM_{r(0)}$,使得$|J(t)|$无界. 特别地,若截面曲率为$-\lambda(\lambda>0)$,则$|J(t)|$将按 ce^{λ} 方式增长.

1.6 辛流形与 Hamilton 系统

辛流形

令 M^{2n}是一个 $2n$ 维微分流形,如果 M^{2n}上有一个 2-微分形式 ω^2 具有性质:

(1) ω^2 非退化,即对任意 $X\neq0$,存在 Y,使得

$$\omega^2(X,Y)\neq 0, \quad X,Y\in TM_x;$$

(2) ω^2 是闭形式,即 $\mathrm{d}\omega^2=0$,

那么 M^{2n}称为一个辛流形,ω^2 称为 M^{2n}上的一个辛结构.

在局部坐标卡$(x^1,\cdots,x^{2n})$下,ω^2 可表示为

$$\omega^2 = \sum_{i,j} a_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j,$$

ω^2 非退化当且仅当矩阵(a_{ij})非奇异.

例 1.3 考虑坐标为$(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$的欧氏空间 R^{2n},则 2-形式 $\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$ 定义了一个辛流形(R^{2n},ω^2).

设 T^*M 为一个 n 维流形 M 上的余切丛,则 T^*M 上的一个局部坐标卡具有形式$(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$. 在此坐标卡下,$T^*M$ 的辛结构可局部地定义为

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i,$$

由此辛结构得到自然辛流形(T^*M,ω^2).

斜对称梯度场

设 M^{2n}是一个配有辛结构 ω^2 的辛流形,$f:M^{2n}\to R$ 是一可微函数,则 f 与 ω^2 通过如下关系唯一地确定了一个斜对称梯度场 sgrad f:

$$\omega^2(v,\mathrm{sgrad}\ f) = vf = \mathrm{d}f(v)(= f \text{ 沿 } v \text{ 的导数}),$$

其中,v 取遍 M^{2n}上的所有可微向量场.

辛坐标

设 ω^2 是 M^{2n}上的一个辛形式,令 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n$ 是 M^{2n}的一个局部坐标系,若在此坐标系下 ω^2 有如下标准形:

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i,$$

则该局部坐标系称为辛坐标. 根据著名的 Darboux 定理,辛坐标总是存在的.

注 易见,在局部辛坐标系下,矩阵(a_{ij})有形式

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

其中,E 是 $n\times n$ 单位矩阵. 对于 M^{2n} 上的可微函数 f,在辛坐标系下,其斜对称梯度场可表示为

$$\text{sgrad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial q_n},-\frac{\partial f}{\partial p_1},\cdots,-\frac{\partial f}{\partial p_n}\right).$$

Hamilton 向量场

设 v 是辛流形 M^{2n} 上的可微向量场. 如果 M^{2n} 上有一可微函数 $H:M\to R$,使得

$$v = \text{sgrad } H,$$

那么,v 称为一个 Hamilton 向量场,而函数 H 叫做 Hamilton 函数或能量函数.

显然,每一个 Hamilton 向量场都决定了 M^{2n} 上的一组常微分方程,称作 Hamilton 系统. 在局部辛坐标 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n$ 下,一个 Hamilton 系统可表示为

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i = 1,2,\cdots,n;$$

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

Poisson 括号

设 f 和 g 是辛流形 M^{2n} 上的光滑函数,ω^2 是 M^{2n} 上的辛结构,则 f 和 g 关于 ω^2 的 Poisson 括号定义为

$$\{f,g\} = \omega^2(\text{sgrad } f,\text{sgrad } g).$$

设(a^{ij})是 ω^2 的矩阵(a_{ij})的逆矩阵,那么在局部坐标系$(x^1,\cdots,x^{2n})$下,Poisson 括号可表示为

$$\{f,g\} = \sum_{i,j} a^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Poisson 括号也可以从另一角度理解：f 和 g 的 Poisson 括号等于函数 g 沿向量场 sgrad f 的导数，即

$$\{f,g\} = (\text{sgrad } f)g.$$

对合性

辛流形(M^{2n},ω^2)上的两个光滑函数 f 和 g 称为是对合的，如果它们的 Poisson 括号等于 0.

1.7 Liouville 定理与 Liouville 可积性

Liouville 定理是 Hamilton 系统理论的最基本定理之一，根据这个定理，为了彻底描述一个 n 个自由度的 Hamilton 系统，只要找出 n 个独立的彼此对合的函数就够了. 下面我们就叙述 Liouville 定理.

Liouville 定理

设辛流形 M^{2n}上有 n 个相互对合的光滑函数 $f_1,\cdots,f_n$，考虑 M^{2n}上由函数 $H=f_1$ 定义的 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad } H$. 给定 n 个常数 $c_1,\cdots,c_n$，令 M_c 是 $f_1,\cdots,f_n$ 的公共水平面：

$$M_c = \{x \in M^{2n} | f_1(x) = c_1, \cdots, f_n(x) = c_n\}.$$

假定这 n 个函数 f_i 在 M_c 上函数独立（也即 1-形式 $\mathrm{d}f_1,\cdots,\mathrm{d}f_n$ 在 M_c 上各点处线性无关），那么有

(1) M_c 是每一个向量场 $F_i=\text{sgrad } f_i$ 的不变光滑 n 维子流形，即每个 F_i 在 M_c 中每一点都同 M_c 相切. 每一个 f_j 都称为 v_i 的一个首次积分；

(2) 若 M_c 是紧致连通的，则它微分同胚于 n 维环面

$$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 = \{(\varphi_1,\cdots,\varphi_n) \bmod 2\pi\};$$

(3) 若 M_c 是连通但非紧致的，则它微分同胚于一个 k 维环面

与 R^{n-k} 的直积

$$T^k \times R^{n-k} = \{(\varphi_1, \cdots, \varphi_k; x_1, \cdots, x_{n-k}) \varphi \bmod 2\pi\};$$

(4) 若 M_c 是环面 T^n，则在其一适当邻域内，曲线坐标系 $(s_1, \cdots, s_n; \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 满足下述性质：

(i) 函数 $s_1(x), \cdots, s_n(x)$ $(x \in M^{2n})$ 在与 T^n 横截的方向上定义了一族坐标，并且它们可表示为首次积分 $f_1, \cdots, f_n$ 的函数. 此时，M_c 可由方程组 $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$ 所定义；

(ii) 在作用量-角变量坐标 (s, φ) 下，Hamilton 向量场 v 的相流可表示为方程

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega(s)$$

的流. 特别地，在 M_c 上有

$$s = 0, \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega(0)t.$$

注意，(s, φ) 不一定是辛坐标，但是可以构造函数 $I = I(s)$，$I = (I_1, \cdots, I_n)$，使 (I, φ) 成为辛坐标. 于是，辛结构 ω^2 在新的坐标下仍有形式

$$\omega^2 = \sum_i \mathrm{d}I_i \wedge \mathrm{d}\varphi_i,$$

I 称为作用量，φ 称为角变量，(I, φ) 构成 M_c 邻域中的作用量-角变量坐标系.

Liouville 可积性

设 H 是辛流形 M^{2n} 上的一个 Hamilton 函数，称 Hamilton 向量场 $v = \mathrm{sgrad}\ H$ 是完全 Liouville 可积的或完全可积的，如果存在一组独立且相互对合的函数 $f_1 = H, f_2, \cdots, f_n$. Liouville 定理中的环面 T^n 称为 Liouville 环面，而这些环面就构成辛流形 M^{2n} 的(带有奇点的)Liouville 叶状结构.

对于 Liouville 可积的情形，Hamilton 函数可在作用量-角变

量坐标系下表示为

$$H = H(I),$$

而相应的 Hamilton 系统可表示为

$$v: \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial I}.$$

令 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial I}\right)^{\mathrm{T}}$，则称 ω 为 Hamilton 系统 v 的轨道的频率.

非共振环面

注意到 $I=$常数代表一个不变环面 T^n，故系统 v 的过每一点的轨道都是条件周期的或拟周期的，从而稠密地布满一个环面 T^m ($m \leqslant n$)，其中，m 等于算术无关的频率个数. 如果在某个环面上算术无关的频率个数达到最大值 n（即不存在 n 个不全为零的整数 $k_1, \cdots, k_n$，使得 $k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0$），那么称该环面为非共振环面.

可以证明，非退化的 Hamilton 系统 v（即当 $\det\left(\frac{\partial \omega}{\partial I}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I^2}\right) \neq 0$ 时）的一切共振环面的并在相空间上的勒贝格测度为零，因而非共振环面集合为相空间上的稠密集.

注 Hamilton 系统一般都不是可积的，而可积系统相当“稀少”，这基本上像无理数对有理数一样. 然而，在许多实际物理、力学问题中，Liouville 可积 Hamilton 系统有着特别的重要性. 由此可见，要判断一个 Hamilton 系统是否可积是多么地不容易.

1.8 Hamilton 系统的能量面

令 M^{2n} 是 $2n$ 维辛流形，$v = \mathrm{sgrad}\ H$ 是具有 Hamilton 函数 H

的 Hamilton 系统. 设 c 是一个常数,则水平集

$$E_c^{2n-1} = \{x \in M^{2n} | H(x) = c\}$$

称为 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad } H$ 的能量面. 由于 Poisson 括号 $\{H,H\}=0$,故 $v=\text{sgrad } H$ 也是 E_c^{2n-1} 上的一个切向量场. 另外,若 c 是 H 的正则值,即在 E_c^{2n-1} 上 grad $f\neq 0$(等价地,rank $f\neq 0$),则 E_c^{2n-1} 是一光滑流形,并称为非奇异(正则)能量面.

由于本书的相当一部分是讨论 4 维辛流形上可积 Hamilton 系统的,故详细介绍有关 2 个自由度可积系统的能量面的问题.

设 M^4 是一个 4 维辛流形,$v=\text{sgrad } H$ 是 M^4 上的一个 Hamilton 系统,并且有第 2 个首次积分 f,使得 $\{H,f\}=0$,此时该系统是 Liouville 意义下可积的. 由于在处理实际的力学及物理问题的过程中,人们常常要讨论许多在某一个能量面上是可积的,而在其它能量面上又是不可积的 Hamilton 系统,因此有必要讨论一个 Hamilton 系统在一个孤立固定的能量面上的可积性. 根据 V. V. Kozlov 及 S. L. Zigin 等人的工作,解析系统一般地要么在所有正则 Hamilton 能量面上可积,要么在其上都不可积. 所以,人们应该考虑可积性与不可积性共存的光滑系统,以及相应的光滑首次积分. 由于函数 H 本身也是 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad } H$ 的一个首次积分,故 3 维能量面 $E_c=\{x\in M^4 | H(x)=c\}$ 是系统 v 的一个不变流形,从而 v 的动力学性质可以限制在 E_c 上讨论. 作为一个辛流形,M 是可定向的,因此 E_c 也是可定向的.

1.9 自然 Hamilton 系统

设 M 是一 n 维光滑流形,K 是 M 上的 Riemann 度量,V: $M\to R$是一个除有限个奇点外光滑的函数,若辛流形(TM,ω^2)上一函数 H 可表示为

$$H = K + V \circ \pi: TM \to R,$$

则 H 叫做自然 Hamilton 函数，其中，$\pi: TM \to M$ 是切丛 TM 到 M 的自然投影. 具体地，H 有表达式

$$H(v,x) = K_x(v,v) + V(x), \quad v \in TM_x, \ x \in M.$$

在力学、物理系统中，Riemann 度量 K 用来刻画动能，V 是构形空间 M 上的势能函数.

此外，若 c 是 H 的正则值，那么 c 也是 V 的正则值. 而 $E_c = H^{-1}(c)$ 是 TM 中余维数为 1 的子流形，即 Hamilton 能量面. 区域 $Q_c = \{x \in M \mid V(x) \leqslant c\}$ 称为构形空间 M 中的可达区域.

1.10 可积系统的动量映射

设 M^{2n} 是一光滑辛流形，H 是 M^{2n} 上的一个光滑 Hamilton 函数，$v = \mathrm{sgrad}\ H$ 是相应的 Hamilton 系统. 假定 v 是 Liouville 可积的，即存在 n 个彼此对合的光滑函数 $f_1 = H, f_2, \cdots, f_n$，它们在 M^{2n} 上几乎处处函数独立.

设映射 $F: M^{2n} \to R^n$ 为

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)), \quad \forall\, x \in M^{2n},$$

则 F 称为可积系统 v 的动量映射.

点 $x \in M^{2n}$ 如果满足

$$\mathrm{rank}\ \mathrm{d}F(x) < n,$$

那么称 x 为映射 F 的临界点. 将 F 的所有临界点集合记为 N，那么像 $F(N)$（记为 Σ）叫做动量映射 F 的分支图(bifurcation diagram). 任一点 $c \in \Sigma$ 称为动量映射 F 的临界值，而点 $y \in R^n - \Sigma$ 称为 F 的非临界值或正则值. 取 F 的一个正则值 a，若 $F^{-1}(a)$ 非空，则由 Liouville 定理知，$F^{-1}(a)$ 的每一连通分支都同胚于一个 n 维环面 T^n. 若 a 沿着 $R^n - \Sigma$ 中一光滑曲线变动，则 Liouville 环面 $F^{-1}(a)$ 也连续变动而不改变其拓扑结构和连通分支个数；若 a 经过 Σ，则 $F^{-1}(a)$ 发生结构性变化，即分支现象.

弄清楚 $F^{-1}(a)$的分支行为，对理解系统 v 在整个流形 M^{2n}上的动力学行为十分有益.

1.11　Bott 函数与首次 Bott 积分

Bott 函数

令 M 是一光滑流形，$f:M\to R$ 是一光滑函数，对于一点 $p\in M$，若 $\text{rank}\ f|_p=0$，或$\mathrm{d}f|_p=0$，则 p 称为 f 在 M 上的临界点. 用局部坐标可说明如下：设(V,φ)为含 p 点的一个局部坐标卡，若函数

$$\bar{f}=f\circ\varphi^{-1}:\varphi(V)\subset R^n\to R$$

满足

$$\left.\frac{\partial\bar{f}}{\partial x_1}\right|_{\varphi(p)}=\cdots=\left.\frac{\partial\bar{f}}{\partial x_n}\right|_{\varphi(p)}=0,$$

则 p 称为 f 的一个临界点，否则就称为 f 的正则点. 此外，在临界点 p 处的矩阵

$$H_f=\left(\frac{\partial^2\bar{f}(\varphi(p))}{\partial x^i\partial x^j}\right)$$

称为 f 的 Hessian 矩阵.

注　p 是 f 的临界点显然等价于 f 的梯度场 grad f 满足 grad $f|_p=0$.

f 在临界点 p 处的零化数定义为 Hessian 矩阵 H_f 的零化空间维数，或等价地说，H_f 的零特征值的个数(重数)，f 在 p 点的指标定义为 H_f 的负特征值的个数(以重数计算). 若 f 在 p 点的零化数为 0，则称 p 点是非退化临界点.

定义 1.6　设 M 是一光滑流形，$N\subset M$ 是一光滑子流形. 若光滑函数 $f:M\to R$ 满足

(1) f 的临界点集合是子流形 N;

(2) f 的零化子空间维数等于 $\dim N$,

那么称 N 为 f 在 M 上的非退化临界子流形. 由于 Bott[15]最先讨论这类函数的有关性质,故称其为 Bott 函数. 易见,这是 Morse 函数的推广.

对任一点 $x\in N$,切空间 TM_x 有分解

$$TM_x = TN_x \oplus TN_x^{\perp},$$

在点 x 的局部坐标系(U,φ)下,设 TM_x 为

$$R^m = R^n \oplus R^{m-n},$$

其中,$m=\dim M, n=\dim N$,而 $R^m=\varphi_*(TM_x), R^n=\varphi_*(TN_x)$, $R^{m-n}=\varphi_*(TN_x^{\perp})$. 此时,上述 Bott 函数 f 满足 $H_f(R^n)=0$. 此外,设

$$E_- = \{X\in R^{m-n} \mid X'H_fX<0\}\cup\{X=0\},$$

则 f 在 x 点的 Morse 指数定义为 $\mathrm{Ind}\, x=\dim E_-$.

Bott 积分

设 M^{2n}是一辛流形,$Q\subset M^{2n}$是 M^{2n}上某个 Hamilton 函数 H 的能量面. M^{2n}上一光滑函数 f 是 Q 上关于 H 的 Bott 积分,仅当其有性质

(1) 在 Q 上 Poisson 括号$\{f,H\}=0$;

(2) f 在 Q 上的临界点集合是 Q 的一个非退化临界光滑子流形.

设 Q 是 4 维辛流形 M 上某一 Hamilton 函数 H 的正则能量面,f 是 H 的一个首次 Bott 积分,那么 f 在 Q 上的非退化临界子流形是曲线或曲面. 临界子流形是曲线且 Morse 指数不等于 1 时的情形如图 1.1 所示,临界子流形是曲线且 Morse 指数等于 1 时的情形如图 1.2 所示,临界子流形为曲面时的情形如图 1.3 所示.

注意 在 Q 是紧致的情况下,f 的非退化临界子流形只能是

圆、环面或 Klein 瓶，因为临界子流形的 Euler 示性数只能为 0(参见 2.2 节).

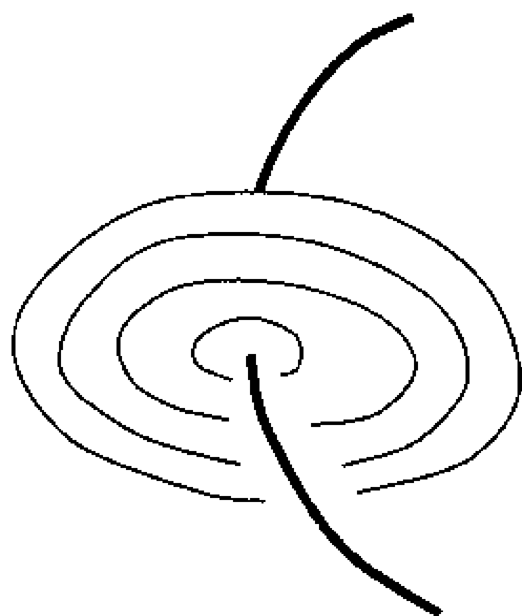


图 1.1

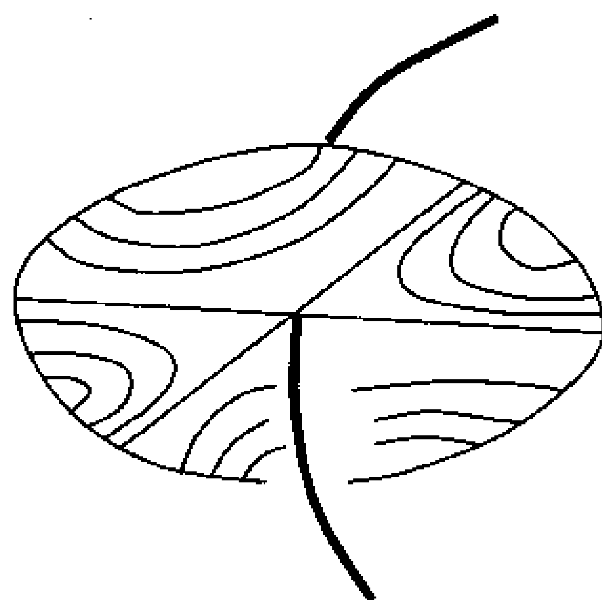


图 1.2

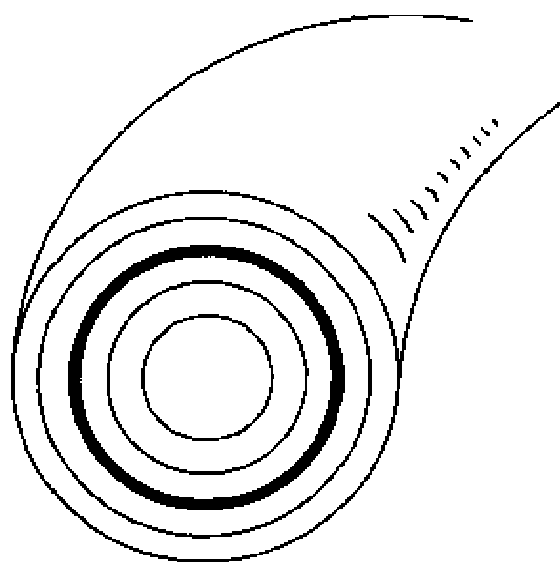


图 1.3

1.12 同调群

这一节及下一节，我们将扼要回顾一下拓扑空间的同调群与基本群的基本知识.

首先，让我们回顾一下奇异同调群.

令 R^n 是通常的欧氏空间，如果 x 与 y 是 R^n 中的两个点，那么 x 到 y 的线段定义为集合 $\{(1-t)x+ty \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$. R^n 中的一个子集 c 称为是凸的，如果任取 c 中两点 x 和 y，x 到 y 的线段都含于 c 中. 显然，凸集的交仍是凸集. 设 $A\subseteq R^n$，A 的凸包定义为 R^n 中所有含 A 的凸集的交.

m-单形

R^n 中的一个 m-单形 s 乃是 R^n 中 $m+1$ 个点构成的集合 $\{x_0, \cdots, x_m\}$ 的凸包，其中，向量 $v_1=x_1-x_0, \cdots, v_m=x_m-x_0$ 线性无关. 注意，此定义与将哪个点视为 x_0 无关.

关于单形，有如下简单事实：

命题 1.9 给定一有限点集合 $\{x_0,\cdots,x_m\}\subset R^n$，下述断言是等价的：

(1) $x_1-x_0,\cdots,x_m-x_0$ 线性无关；

(2) 如果 $\sum_i s_i x_i=\sum_i t_i x_i$，并且 $\sum_i s_i=\sum_i t_i$，那么 $s_i=t_i, i=0,\cdots,m$.

该命题的证明是一个简单的线性代数练习.

由上面这个命题可得如下命题：

命题 1.10 如果 m-单形 s 是点集 $\{x_0,\cdots,x_m\}$ 的凸包，那么 s 中的任一点都可唯一地表示为 $p=\sum_i t_i x_i$，其中，$t_i\geqslant 0, i=0,\cdots,m$，且 $\sum_i t_i=1$.

上述点集中的各点 x_i 称为单形 s 的顶点. 由命题 1.10 可以看出，s 中的每一点都可以用一适当选择的 $m+1$ 元组 $(t_0,\cdots,t_m)$ 表示.

有序单形与标准单形

如果将单形 s 的顶点赋予一特定的顺序，那么 s 就是一个有序单形.

现在令 s 是一个有序单形，其顶点为 $x_0,\cdots,x_m$. 设 δ_m 为 R^{m+1} 中满足 $\sum_i t_i=1$ 与 $t_i\geqslant 0$ 的点 $(t_0,\cdots,t_m)$ 的集合，定义一个函数

$$f:\delta_m\to s$$

为 $f(t_0,\cdots,t_m)=\sum_i t_i x_i$，那么 f 是连续的. 此外，由命题 1.10 知，f 还是一一映射，并且 f^{-1} 也连续，从而是一个同胚. 因此，每一个 m-单形都是 δ_m 的同胚像. 注意，δ_m 也是一个以 $x_0'=(1,0,\cdots,0), x_1'=(0,1,\cdots,0),\cdots,x_m'=(0,\cdots,0,1)$ 为顶点的 m-单形，

这种单形 δ_m 叫做标准 m-单形.

奇异单形与奇异链

令 X 是一拓扑空间,δ_m 是标准 m-单形. 任一连续映射

$$\varphi:\ \delta_m \to X$$

称为一个奇异单形. 由此易见,任意 0-单形都可等同 X 中的点,任意 1-单形可等同 X 中的道路,等等.

如果 φ 是一个 m-单形,i 是一个整数,且满足 $0\leqslant i\leqslant m$,φ 的第 i 个面 $\partial_i\varphi$ 定义为下述奇异 $m-1$ 单形:

$$\partial_i\varphi(t_0,\cdots,t_m) = \varphi(t_0,\cdots,t_{i-1},0,t_{i+1},\cdots,t_m).$$

如果 $f:X\to Y$ 是连续映射,φ 是 X 中的一个奇异单形,那么 Y 中的奇异单形 $f_\#(\varphi)$ 定义为 $f_\#(\varphi)=f\circ\varphi$. 此外,若 $g:Y\to W$ 是连续映射,$\mathrm{id}:X\to X$ 是恒等映射,那么有

$$(g\circ f)_\#(\varphi) = g_\#\circ f_\#(\varphi) = g\circ f(\varphi),$$

以及

$$(\mathrm{id})_\#(\varphi) = \varphi.$$

设 G 是一个阿贝尔(交换)群,如果存在一个子集 $A\subseteq G$,使得 G 中的每一个元素 g 都有一个唯一的表示

$$g = \sum_{a\in A} n_a a,$$

其中,n_a 是一个整数,且仅对有限多个 a 非零,那么 G 叫做自由群,集合 A 称为 G 的一个基.

注意 若 G 是一个具有基 A 的自由阿贝尔群,H 是一个阿贝尔群,那么每一个映射 $f:A\to H$ 都可延拓成一个同态 $f:G\to H$,并且这种延拓是唯一的.

如果 X 是一个拓扑空间,则可定义 X 上的一个自由阿贝尔群 $s_m(X)$,其基是 X 中所有奇异 m-单形 φ 构成的集合. $s_m(X)$中的一个元素 c 称为 X 中的一个奇异 m-链,并且有形式

$$c = \sum_{\varphi} n_{\varphi}\varphi,$$

其中，n_{φ} 是整数，并且除了有限多个 φ 外都为 0.

边缘算子

由于算子 ∂_i 是奇异 m-单形集合到奇异$(m-1)$-单形集合的一个映射，所以有一个延拓后的同态：

$$\partial_i: s_m(X) \to s_{m-1}(X),$$

其中

$$\partial_i c = \partial_i\left(\sum_{\varphi} n_{\varphi}\varphi\right) = \sum_{\varphi} n_{\varphi}\partial_i\varphi.$$

定义一个算子如下：

$$\partial: s_m(X) \to s_{m-1}(X),$$

其中

$$\begin{aligned}\partial &= \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 + \cdots + (-1)^m\partial_m \\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\partial_i,\end{aligned}$$

∂称作边缘算子.

关于边缘算子，有如下重要性质：

命题 1.11　复合算子

$$\partial\circ\partial: s_m(X) \xrightarrow{\partial} s_{m-1}(X) \xrightarrow{\partial} s_{m-2}(X)$$

是零算子，即 $\partial\circ\partial=0$.

奇异同调群

设 c 是 $s_m(X)$中的一个元素，若 $\partial c=0$，则称 c 是 m-闭链. $s_m(X)$中的一个元素 d 若满足 $d=\partial e$，其中，e 是 $s_{m+1}(X)$中的某个元素，则称 d 是一个 m-边缘链. 由于 ∂是一个同态，其核 $\ker\partial$，即所有 m-闭链的集合，是 $s_m(X)$的一个子群，并以 $Z_m(X)$表示. 同理，∂在 $s_m(X)$中的像也是一个子群，记为 $B_m(X)$. $B_m(X)$显然是

所有 m-边缘链构成的集合.

由上面的命题 1.11 知,$B_m(X)$是 $Z_m(X)$的一个子群. 下面的商群

$$H_m(X) = \frac{Z_m(X)}{B_m(X)}$$

称为 X 的第 m 个奇异同调群.

可以证明,同调群是(同伦意义下的)拓扑不变量.

Euler 示性数

对于相当大的一类常遇到的拓扑空间 X 来说,其同调群是有限生成的. 由抽象代数的知识我们知道,若 A 是一个有限生成的交换群,则 A 中具有有限阶的元素(即存在 $n>0$,使得 $na=0$ 的元素 a)构成 A 的挠子群 T,而商群$\frac{A}{T}$是一自由交换群. $\frac{A}{T}$的最小生成元的个数称为 A 的秩. 在代数拓扑中,群 $H_m(X)$的秩称为 X 的第 m 个 Betti 数 β_m,而 X 的 Euler 示性数 $\chi(X)$则定义为

$$\chi(X) = \sum_m (-1)^m \beta_m.$$

关于两个拓扑空间积的 Euler 示性数,有如下定理:

定理 1.3 设拓扑空间 X 和 Y 都是 CW 复形,则 $X\times Y$ 也是 CW 复形,并且有

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y).$$

通常,人们所熟悉的微分流形基本上都是 CW 复形.

考虑到下文的需要,下面我们给出几个简例.

单位圆 S^1 由于 S^1 本身就是一个闭链,而 2 维链为零,故有

$$H_1(S^1) = Z_1(X) \approx Z.$$

这是只有一个生成元的自由交换群.

显然有(任意一点都是 1 维闭链,任意两点都是一个 1 维奇单形的边缘)

$$H_0(S^1) \cong Z,$$

于是

$$\chi(S^1) = 1^0 + (-1)^1 = 0.$$

环面 T^2 对于 T^2，有 $T^2 = S^1 \times S^1$，而 S^1 是 CW 复形，故其 Euler 示性数

$$\chi(T^2) = \chi(S^1) \times \chi(S^1) = 0.$$

Klein 瓶 K K 是由熟知的两个 Möbius 带沿边界粘合而成的，关于 K 的同调群，可以证明

$$H_0(K) \approx Z,$$
$$H_1(K) \approx Z \oplus Z_2,$$
$$H_2(K) \approx 0,$$

因此

$$\chi(K) = 1^0 + (-1)^1 = 0.$$

1.13 基 本 群

道路同伦

令 x 是一拓扑空间（比如欧氏空间 R^n），$\delta_1:[0,1]\to X$ 及 $\delta_2:[0,1]\to X$ 是 X 中的两个道路，且有相同端点，即满足 $\delta_1(0)=\delta_2(0)=x_0$，$\delta_1(1)=\delta_2(1)=x_1$. 如果存在一个连续映射 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$，使得

$$F(s,0) = \delta_1(s), \quad \forall\, s \in [0,1],$$
$$F(s,1) = \delta_2(s), \quad \forall\, s \in [0,1],$$
$$F(0,t) = x_0, \quad \forall\, t \in [0,1],$$
$$F(1,t) = x_1, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

那么 F 叫做从 δ_1 到 δ_2 的一个同伦，记作 $\delta_1 \simeq \delta_2$.

直观地讲，若在 X 中存在一个从 δ_1 到 δ_2 的同伦，就意味着道路 δ_1 可以在 X 中连续形变（保持端点不动）到道路 δ_2 上.

特别地，若端点重合，即 $x_0=x_1$，则称道路 δ_1 是一个环路（或圈）. 此时，若 δ_2 是一个常值环路，$\delta_2(s)=x_0, \forall\, s\in[0,1]$，那么 $\delta_1\simeq\delta_2$ rel $\{0,1\}$表示 δ_1 与一点同伦，并称 δ_1 可以收缩到一点，或是同伦平凡的. 显然，平面上的环路都是同伦平凡的. 若平面上有"洞"，则围绕该"洞"的道路是非同伦平凡的，轮胎面上的经线与纬线也是非同伦平凡的.

易见，上述同伦是一个等价关系，并称之为同伦等价：

(1) $\delta\simeq\delta$ rel $\{0,1\}$；

(2) $\delta_1\simeq\delta_2$ rel $\{0,1\}\Rightarrow\delta_2\simeq\delta_1$ rel $\{0,1\}$；

(3) $\delta_1\simeq\delta_2$ rel $\{0,1\}$与 $\delta_2\simeq\delta_3$ rel $\{0,1\}\Rightarrow\delta_1\simeq\delta_3$ rel $\{0,1\}$.

该等价关系定义了从 x_0 到 x_1 道路 δ 的同伦类$[\delta]$.

设 δ_1 是 x_0 到 x_1 的一条道路，δ_2 是 x_1 到 x_2 的一条道路，我们定义一个 x_0 到 x_2 的道路 $\delta_1\delta_2$，该道路由 δ_1 与 δ_2 连接而成：

$$\delta_1\delta_2(s)=\begin{cases}\delta_1(2s), & 0\leqslant s\leqslant\frac{1}{2};\\ \delta_2(2s-1), & \frac{1}{2}<s\leqslant 1.\end{cases}$$

易证下述结论：

(4) $\delta_1\simeq\sigma_1$ rel $\{0,1\}$与 $\delta_2\simeq\sigma_2$ rel $\{0,1\}\Rightarrow\delta_1\delta_2\simeq\sigma_1\sigma_2$ rel $\{0,1\}$.

由此可定义道路 δ_2 的同伦类$[\delta_2]$对道路 δ_1 的同伦类$[\delta_1]$的右乘$[\delta_1][\delta_2]$. 可以证明下面的命题：

命题 1.12 令 $\pi_1(X,x_0)$表示 X 中以 x_0 为基点的环路（即所有满足 $\delta(0)=\delta(1)=x_0$ 的道路 δ）的同伦类，其中道路同伦类的乘法如上定义，则 $\pi_1(X,x_0)$是一个群，其单位元是常值道路（以 x_0 为基点）的同伦类，$[\delta]$的逆元是环路

$$\delta^{-1}=\delta^{-1}(s)=\sigma(1-s),\quad 0\leqslant s\leqslant 1$$

的同伦类.

基本群

设 x_0 与 x_1 是拓扑空间 X 中不同的点，人们要问 $\pi_1(X,x_0)$与 $\pi_1(X,x_1)$之间有什么关系，下面的命题回答了这一问题.

命题 1.13　令 α 是由 x_0 到 x_1 的道路，映射

$$\alpha_*:[\delta]\to[\alpha^{-1}\delta\alpha]$$

是群 $\pi_1(X,x_0)$到群 $\pi_1(X,x_1)$的一个同构(即保持代数运算的可逆映射).

由此命题知，若 X 道路连通，则群 $\pi_1(X,x_0)$在同构的意义下不依赖于基点 x_0 的选择. 于是，我们可忽略基点，将 $\pi_1(X,x_0)$写作 $\pi_1(X)$，并称之为基本群.

显然，基本群是拓扑不变量.

单连通

一个拓扑空间 X 如果是道路连通的(即对该空间中任意两点 x_1 与 x_2，都存在一连续映射 $\alpha:[0,1]\to X$，使得 $\alpha(0)=x_1$，$\alpha(1)=x_2$)，并且其基本群是平凡的，那么称 X 是单连通的.

1.14　3 维流形的若干知识

连通和

令 M,M_1,M_2 是 3 维连通流形，假定存在 3-胞腔 $C_i\subset \text{Int}\ M_i$ $(i=1,2)$及嵌入

$$h_i:\ R_i=M_i-\text{Int}\ C_i\to M,$$

使得

$$h_1(R_1) \cap h_2(R_2) = h_1(\partial C_1) = h_2(\partial C_2),$$

并且

$$M = h_1(R_1) \cup h_2(R_2),$$

那么称 M 为 M_1 和 M_2 的连通和，并记为

$$M = M_1 \# M_2.$$

直观地讲，将两个 3 维流形各挖去一个 3 维球 D_i^3（即 3-胞腔），然后再沿挖去 D_i^3 后留下的边界 S_i^2 粘合在一起，就得到两个 3 维流形的连通和.

关于连通和，有如下断言：

引理 1.1 连通和所定义的代数运算在可定向的 3 维流形与保定向同胚范畴中是可结合与可交换运算.

关于连通和的基本群，有

引理 1.2 设 $M=M_1 \# M_2$，则

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2).$$

素流形

定义 1.7 若一个 3 维流形 M 的任一表示 $M=M_1 \# M_2$ 都意味着 M_1 和 M_2 中必有一个是 3 维球面 S^3，则称 M 是一个素(Prime)流形.

关于 3 维流形，有如下基本结论：

命题 1.14 设 M 是一个紧致无边的 3 维流形，则 M 有一素分解：

$$M = M_1 \# \cdots \# M_n,$$

其中，每一 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是素流形.

不可约流形

定义 1.8 设 M 是一个 3 维流形，如果 M 中每一个 2 维球面

都是 M 中某个3-胞腔的边界,则称 M 是不可约的(Irreducible).

命题 1.15 如果3维素流形 M 是可约的,那么 M 是以 S^1 为底空间的2维球面丛.

Seifert 纤维表示

考虑柱体

$$D^2 \times [0,1],$$

其中

$$D^2 = \{z \in C = R^2 \mid |z| \leqslant 1\},$$

以及映射 $f: D^2\times\{0\}\to D^2\times\{1\}$:

$$f(z,0) = \left(e^{\frac{2\pi i b}{a}}z,1\right),$$

其中,a 和 b 是整数,满足 $a>0$,a 与 b 互素.

将上述柱体两端利用映射 f 等同起来,就得到实心环体的一种纤维化表示,其纤维是

$$\left\{\left(e^{\frac{2\pi i k b}{a}}z_0,t\right) \middle| z_0 \in D^2, t \in [0,1]\right\}, \quad k = 0,\cdots,a-1.$$

由此,可在实心环体 $D^2\times S^1$ 上定义一个 (a,b) 型纤维化表示,以 D^2 为底空间,以 S^1 为纤维,在异于纤维(当 $a>1$ 时)

$$\{(0,t) \mid t \in [0,1]\}$$

的其它纤维处都有一局部平凡表示. 此外,环体中的纬线都不是纤维.

图1.4是实心环体的(2,1)型 Seifert 纤维化例子.

定义 1.9 令 $p: M^3\to B$ 是以 B 为底空间、以 S^1 为纤维的纤维丛,令 T^2 是边界 ∂M^3 的一个连通分支. 设 V 是一个实心环体,将 V 沿边界 T^2 同 M^3 粘合,使得 T^2 中的纤维在粘合后不是 V 的纬线. 于是,V 可有如上描述的纤维表示,使得 ∂V 上的纤维同 M^3 在 T^2 上的纤维一致. 如此所得到的流形称为 Seifert 空间或 Seifert 纤维化表示.

在可积 Hamilton 系统理论中，具有 Bott 积分的能量面上只有(2,1)型的 Seifert 纤维化表示允许出现. 因此，研究含有(2,1)

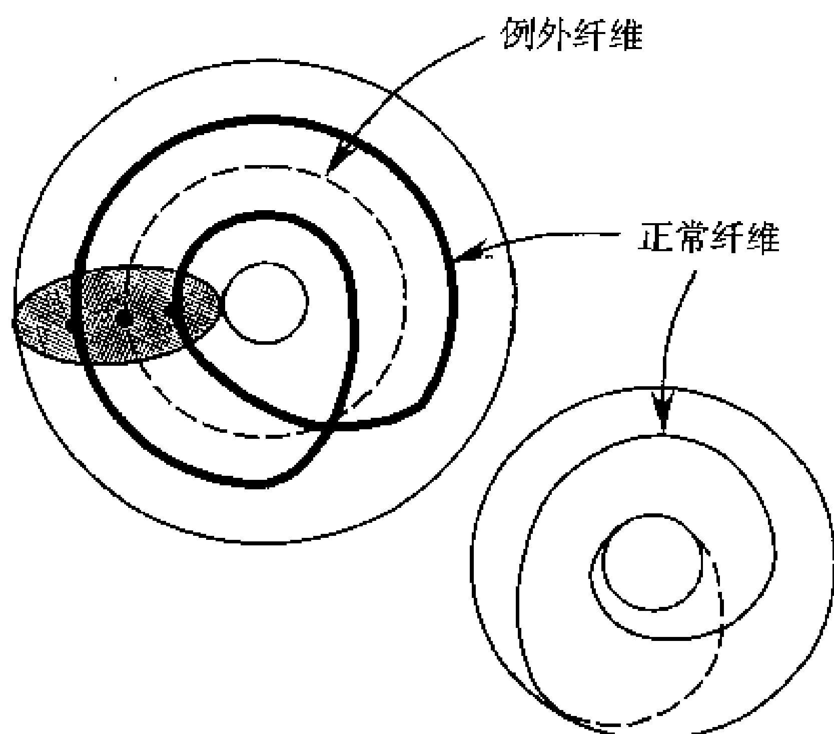


图 1.4

型的纤维化的实心环体的 Seifert 纤维化表示，对于 Hamilton 系统的拓扑理论是非常重要的.

Dehn 流形

设 L 是 3 维球面 S^3 中的一个环链(link)，以 $e(L)$表示环链 L 在 S^3 中的"余集"，即

$$e(L) = S^3 - N(L),$$

其中，$N(L)$表示 L 在 S^3 中的一个管状开邻域. 再取 $e(L)$的边界 $\partial e(L)$中的一个简单闭曲线 l，通过取与简单闭曲线 L 的并 $L_1 = L \cup l$，便得到一个新的环链，并将这种过程称为缠绕操作. 此外，当 l 是 $\partial e(L)$中某个圆盘的边界时，该缠绕操作是平凡的，反之，则缠绕操作是非平凡的.

定义 1.10 S^3 中的一个环链 L 称为一个重复环链(iterated toral link),如果 L 可以由平凡纽结通过有限次缠绕操作得到.

由此可以定义所谓的 Dehn 流形:

定义 1.11 设 M 是一个 3 维流形,如果存在一个重复环链 $L \subset S^3$,使得 M 可由 $e(L)$ 通过把若干实心环体沿边界 $\partial e(L)$ 粘合而成得到,则 M 称为 Dehn 流形.

Dehn 流形的概念在讨论可积 Hamilton 系统的拓扑等价类时十分有用.

第 2 章　M^4 上可积 Hamilton 系统的若干性质

在这一章中，我们将讨论 M^4 上可积 Hamilton 系统的若干概念及其性质，它们对于更深入地探讨可积 Hamilton 系统的性质是不可缺少的.

2.1　可积 Hamilton 系统的拓扑等价

首先，我们考虑一般情形下的 Hamilton 系统的拓扑等价性概念.

设 V_1 是相空间（辛流形）M_1^{2n} 上某能量面 E_1^{2n-1}（$E_1^{2n-1}=\{H_1=\text{const}\}$）上的一个非共振可积 Hamilton 系统，$V_2$ 是相空间 M_2^{2n} 上某能量面 E_2^{2n-1} 上的一个非共振可积 Hamilton 系统. 此外，假定 E_1^{2n-1} 与 E_2^{2n-1} 的定向都已给定.

定义 2.1　假定存在一个微分同胚 $h:E_1^{2n-1}\to E_2^{2n-1}$，$h$ 将系统 V_1 的 Liouville 环面变换到系统 V_2 的 Liouville 环面，并且保持能量面 E_1^{2n-1} 与 E_2^{2n-1} 的定向，那么称 E_1^{2n-1} 上可积 Hamilton 系统 V_1 与 E_2^{2n-1} 上可积 Hamilton 系统 V_2 拓扑等价（或几何等价）.

注意　h 不一定将 E_1^{2n-1} 上一个首次积分 f_1 的水平集映到 E_2^{2n-1} 上一个首次积分 f_2 的同一水平集，有可能映到 f_2 的不同水平集上，如图 2.1 所示.

还有更强的拓扑等价定义：

定义 2.2　设 V_1 与 V_2 满足定义 2.1 中所要求的条件，而且微分同胚 h 还保持各自 Bott 积分的临界子流形的定向，那么称 V_1

与 V_2 强拓扑等价.

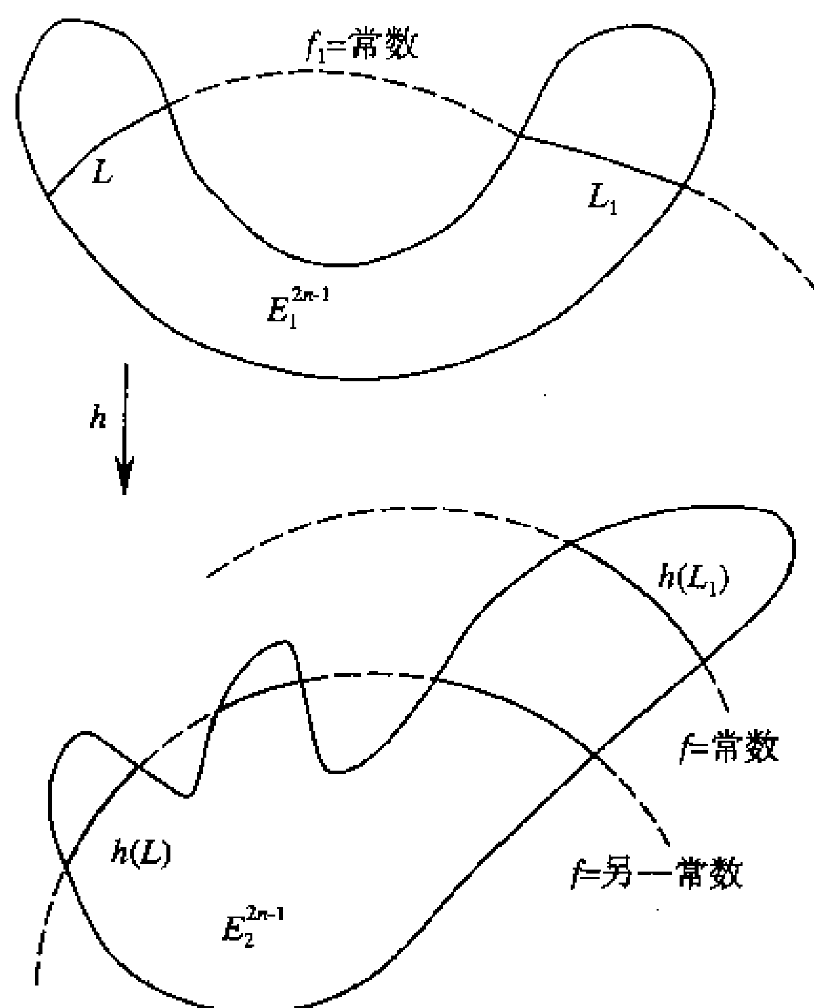


图 2.1

有了拓扑等价的概念，人们就可以对可积系统进行分类，从而有助于从拓扑角度判定一个 Hamilton 系统的可积与不可积性.

2.2　Bott 积分的临界子流形

由于现实中大多数可积系统的首次积分在几乎所有的能量面上都是 Bott 积分，故有必要对 Bott 积分做深入讨论.

设光滑函数 $f:M^4\to R$ 是 M^4 上某个 Hamilton 函数在其非奇

异(正则)能量面 E(即不含 H 的临界点)上的 Bott 积分. 这一节中,我们将讨论 f 的临界子流形的结构.

首先,讨论一个一般性的结果:

定理 2.1 设 E 是 M^{2n}上某个 Hamilton 函数 H 的非奇异能量面,f 是 H 的一个 Bott 积分,那么 f 的临界点集合不含孤立点.

证明 因为 E 是 M^{2n}的非奇异能量面,故不含 H(在 M^{2n}上)的临界点,于是 E 上的 Hamilton 系统 $v=\mathrm{sgrad}\ H$ 是一个处处不为零的向量场,令 φ_t 是 E 上由 v 生成的流(即 Hamilton 流). 现在设 p 是 f 在 E 上的一个临界点,由于 f 是 v 的一个积分,故 f 在 v 的任一条轨道上是一个常数. 以下证明轨道 $\varphi_t(p)$上的每一点都是 f 在 E 上的临界点.

任取 $\varphi_t(p)$上一点 q. 取过 p 点与 q 点且与流 φ_t 横截的 Poincaré 截面 D_p 与 D_q,它们都微分同胚于 $2n-1$ 维圆盘 D^{2n-1}. 由管状流定理[37]知,对适当选取的 D_p 与 D_q,流 φ_t 导出一个微分同胚 $\varphi:D_p\to D_q$,于是有(注意,$\varphi(x)$与 x 在一条轨道上)

$$f(\varphi(x)) = f(x), \quad \forall\ x\in D_p.$$

考虑 D_p 的局部坐标系$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$与 D_q 的局部坐标系$(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$,则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1},\\ \cdots,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_{n-1}},\end{cases}$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{D}\phi\,\frac{\partial f}{\partial y_0}.$$

但 p 是 f 的临界点,即有$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_p=0$,而 $\mathrm{D}\phi$ 非退化,由此推出

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_q = 0.$$

注意到沿轨道 $\varphi_t(p)$ 有 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，故 q 也是 f 的临界点. 此外，由向量场 v 的非零性知，轨道 $\varphi_t(p)$ 是非平凡的，因此 f 的每一临界点都是非孤立点. 证毕.

由此可得下述事实：

定理 2.2　M^4 上的 Bott 积分在一紧致非奇异能量面上的连通临界子流形是下述 3 种情形之一：圆、2 维环面或 Klein 瓶.

证明　设 f 是系统 $v=\text{sgrad}\,H$ 在 H 的非奇异能量面上的 Bott 积分，L 是 f 在 E 中的临界子流形. 由于 L 是 v 的不变集，即过任一点 $p\in L$ 的轨道仍含于 L 中，故 v 在 L 上的限制是 L 上的处处不为零的向量场，这表明 L 的 Euler 示性数为 0. 于是，在 1 维情况下 L 是圆，在 2 维情况下 L 是环面或 Klein 瓶.

推论 2.1　设 H 是 M^4 上的 Hamilton 函数，E 是 H 的一个非奇异能量面. 如果基本群 $\pi_1(E)$ 不含指数为 2 的子群，则 H 的 Bott 积分 f 在 E 上没有临界 Klein 瓶.

证明　由代数拓扑知，若 E 有一 Klein 瓶作为其子流形，则 $\pi_1(E)\neq e$（e 为单位元），并且 $\pi_1(E)$ 含有阶数为 2 的子群，同假设矛盾.

注　迄今为此，人们还未在具体的物理和力学系统中见到哪个 Bott 积分在非奇异能量面上有临界 Klein 瓶，因此，有理由不考虑具有临界 Klein 瓶的 Bott 积分. 另外，下面的结论表明即使从纯理论角度看，以 Klein 瓶为临界子流形的 Bott 积分的讨论也无太大意义.

命题 2.1（Fomenko[19,20]）　设 E 是 M^4 上某个 Hamilton 函数 H 的非奇异能量面，f 是 E 上关于 H 的 Bott 积分，其临界子流形含有 Klein 瓶. 令 $U(E)$ 是 E 在 M^4 中一充分小的管状邻域，那么

存在一个二重覆盖

$$\pi:(U'(E'),H',f')\rightarrow(U(E),H,f),$$

这里,$U'(E')$是一辛流形,H'是$U'(E')$上一个新的 Hamilton 函数,具有形式$H'=\pi^*(H)$. 并且系统$v'=\text{sgrad } H'$在能量流形$E'=\pi^{-1}(E)$上可积,其 Bott 积分$f'=\pi^*(f)$,f'的临界子流形都是可定向的,从而仅含圆与环面. 在这种情形下,E中的临界 Klein 瓶都"展开"为E'中的环面. 此外,$U'(E')$也是流形E'的管状邻域.

由上述命题和前面的讨论可见,在讨论 Bott 积分时只需考虑临界子流形是圆或环面的情形.

下面讨论一下 3 维能量面上的 Bott 积分f在某临界子流形上的指数问题.

设f的临界子流形L是一个圆,则L的法丛中的纤维是 2 维欧氏平面. 于是,f关于L的 Morse 指数只有 3 种可能:

(1) Ind $L=0$,这时f在L上取极小值;

(2) Ind $L=2$,这时f在L上取极大值;

(3) Ind $L=1$,这时f在L上具有鞍点性质,或等价地具有双曲性质:设D_x是与L在某点$x\in L$横截相交的圆盘,则f限制在D_x上的性态就是通常 Morse 函数在鞍点附近的性态. 这里,鞍点(双曲临界点)是指这样的临界点,在这样的点处函数既不取极小值,也不取极大值.

图 2.2 给出了在截面D_x上对应不同 Morse 指数的 3 种情形.

以后称指数为 1 的临界圆为鞍临界圆(saddle critical circle)或双曲临界圆(hyperbolic critical circle).

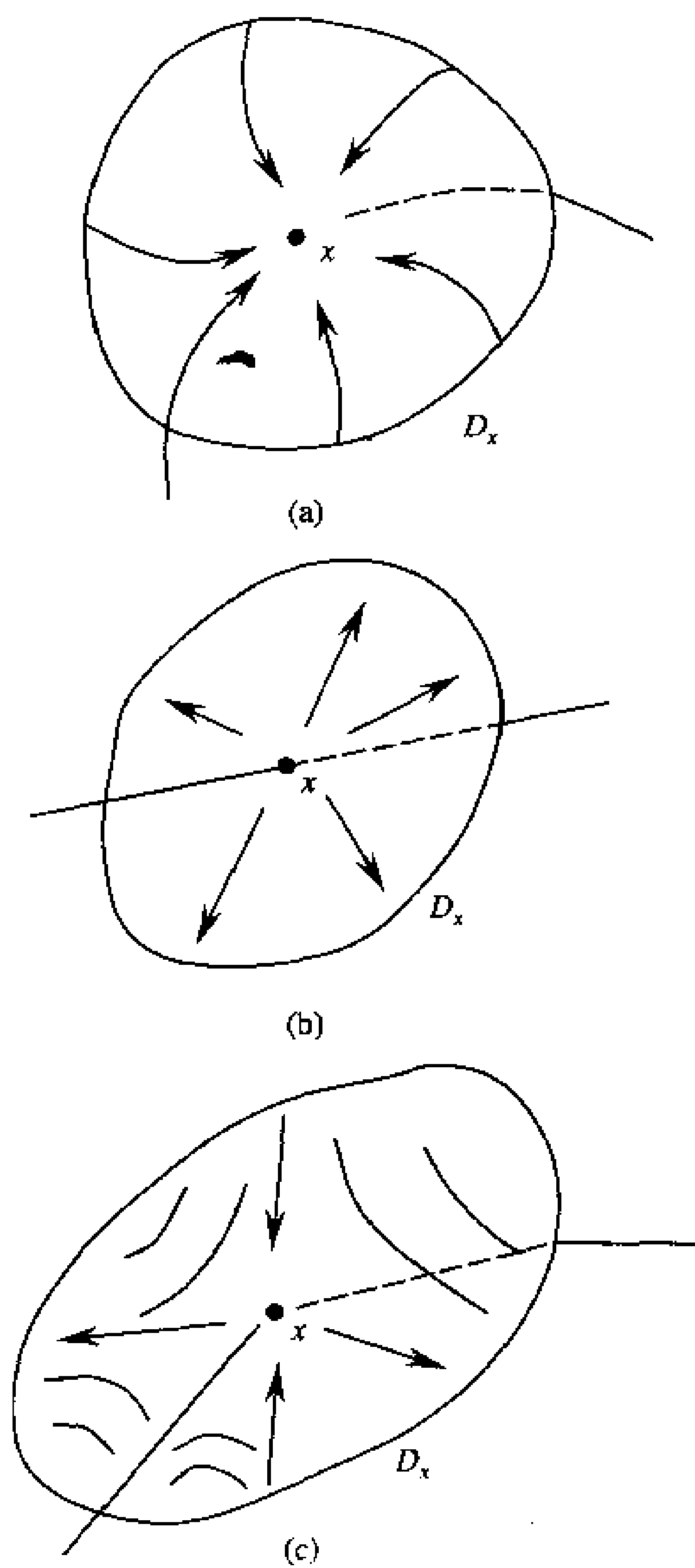


图 2-2

2.3 非共振可积 Hamilton 系统

我们首先考虑一般维数情形下的可积系统及其能量面的 Liouville 叶状结构，即一族 Liouville 环面 T^n.

定义 2.3 设 H 是辛流形 M^{2n} 上的一个 Hamilton 函数，E 是 H 的一个非奇异(且非空)能量面. 如果在 E 中存在稠密的非共振 Liouville 环面(参见 1.7 节)集，那么称 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad}\,H$ 在 E 上是非共振的.

在非共振的情况下，一条积分轨道的闭包往往就是包含该轨道的 Liouville 环面本身，可以证明这时的 Bott 积分的临界子流形正是一个 Liouville 环面.

对具体的物理和力学系统的研究(Oshemkov，Charlamov，Fomenko，Bolsinov，Kozlov 等[19])表明，在 4 维辛流形 M^4 上，大多数有着物理背景的 Hamilton 系统在几乎所有的能量面上都是非共振的. 此外，对于非共振的 Hamilton 系统来说，Liouville 环面的分布并不依赖于具体 Bott 积分的选择. 因此，重要的事情是 Bott 积分的存在与否，关于这方面的详细讨论，读者可参考 Fomenko 的原始论文[17,20]. 当然，在具体问题的讨论中能够找出最简单的 Bott 积分将有助于对问题的处理.

2.4 Liouville 环面的分支

设 E 是 3 维能量面，f 是 E 的 Bott 积分，我们知道对于 f 的正则值 c，$f^{-1}(c)$是一个 Liouville 环面. 设 c_0 是 f 的一个临界值，那么当 c 作为参数变化经过 c_0 时，环面 $f^{-1}(c)$会发生迁移、消失或再出现. 特别是环面 $f^{-1}(c)$在 $f^{-1}(c_0)$附近变动时会发生结构性变化，即所谓的分支. 这里的分支同经典分支理论相比更丰富、

更复杂，因为这是关于流形的分支.

现在让我们看一下当 c 经过 f 的临界值 c_0 时 Liouville 环面 $f^{-1}(c)$是如何随参数 c 变化的.

令 A 表示 $f^{-1}(c_0)$的一个连通分支，并设 A 包含 $f^{-1}(c_0)$中的临界点. 那么有两种情形：

(1) f 的临界子流形 L 在 A 中是连通的，这时称 f 在 A 上是简单积分；

(2) 临界子流形 L 在 A 中由多于一个连通分支组成，这时称积分 f 在 A 上是复杂的.

关于 Liouville 环面的分支，下面的结果是显然的：

定理 2.3　设 Bott 积分 f 在能量面 E 上具有性质：f 在所有包含临界点的水平集 $f^{-1}(c_0)$上都是简单的. 那么有下述几种情形：

(1) 临界子流形 L 是一个极大值圆. 这时，存在一单参数 Liouville 环面族$\{T_\varepsilon\subset f^{-1}(c_0-\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$，当 ε 减小时 T_ε 变小(变细)，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $T_\varepsilon\to L$. 或者临界子流形 L 是一个极小值圆. 这时，同样有一单参数 Liouville 环面族$\{T_{\varepsilon'}\subset f^{-1}(c_0+\varepsilon')\mid\varepsilon'>0\}$，当 $\varepsilon'\to 0$ 时 $T_{\varepsilon'}\to L$. 因此有 $L=R$，其中，R 的定义如前.

(2) L 是一个极大值环面. 那么存在两个单参数 Liouville 环面族$\{T_\varepsilon\subset f^{-1}(c_0-\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$与$\{T_{\varepsilon'}\subset f^{-1}(c_0+\varepsilon')\mid\varepsilon'>0\}$，当 $\varepsilon\to 0$，$\varepsilon'\to 0$ 时，T_ε 与 $T_{\varepsilon'}$相互靠近，并在 L 上粘合在一起. 从拓扑角度看，在 L 是极大值环面的情形下，当 c 在 c_0 附近变化时，环面 $f^{-1}(c)$无定性改变. 同样的结论也适合于 L 是极小值环面的情形. 易见 $L=A$.

(3) L 是一个鞍临界圆(或双曲临界圆). 这时，$f^{-1}(c_0)$中含 L 的连通分支 A 是分片光滑、紧致的 2 维多面体，其奇异曲线就是 L，并且在 L 的邻域内 A 形如两个在 L 上横截相交的平面. 以 X 表示“十”字形集合，则 A 在 L 的局部邻域内可表示为 $X\times I$，这

里，I 是 L 上一充分小的线段. $X\times I$ 如图 2.3 所示.

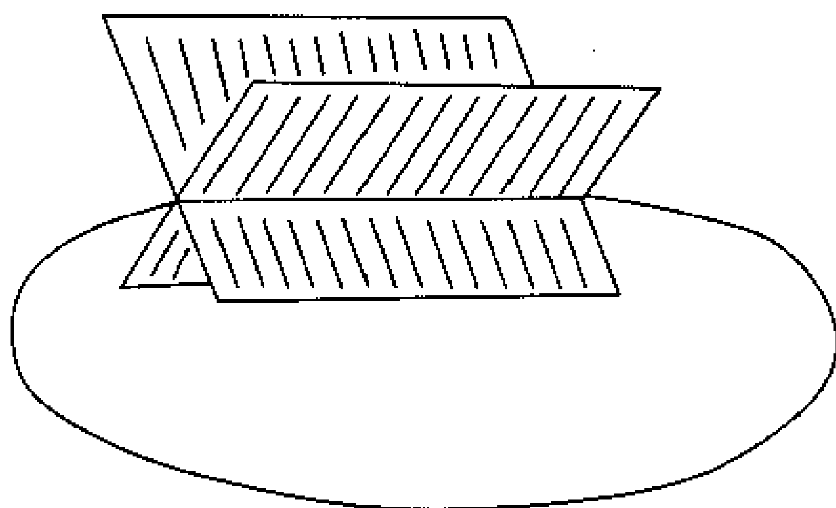


图 2.3

(4) L 是一极值(极小或极大)Klein 瓶. 那么存在一个单参数 Liouville 环面族 T_ϵ，当 $\epsilon\to 0$ 时 $T_\epsilon\to L$，并且 $L=A$.

关于该定理的进一步详细讨论也可参见 A. T. Fomenko 的文章[17,20].

需要强调的是，在实际的物理系统中，人们并未发现临界 Klein 瓶的存在，故情形(4)一般不做过多讨论.

作为定理 2.3 的补充，有下述结论[17]：

定理 2.4 设 E 是一紧致 3 维能量面，f 是 E 上的一个 Bott 积分，那么关于 f 的任一 Liouville 环面分支都可由定理 2.3 中的 4 类基本分支复合得到.

2.5 可积 Hamilton 系统的构架与复杂度

构架(skeleton)与复杂度(complexity)是前苏联学派[17]在研究可积 Hamilton 系统的拓扑不变量时提出的，它们对于可积 Hamilton 系统的分类来说是很好的工具.

设 E 是 3 维流形，我们考虑 E 的 Liouville 叶状结构. 设沿着某个 Liouville 环面 T 把 E 割开，于是 E 变成有两个环面边界 T 与 T' 的有边流形，现在利用保持定向的微分同胚 $T\to T'$ 再将 E 沿 T 粘合起来，则我们通过 E 得到一个新的 3 维流形 E' 以及一个新的 Liouville 叶状结构，如图 2.4 所示. 我们称 E' 上的 Liouville 叶状结构是通过扭曲 E 的 Liouville 叶状结构得到的.

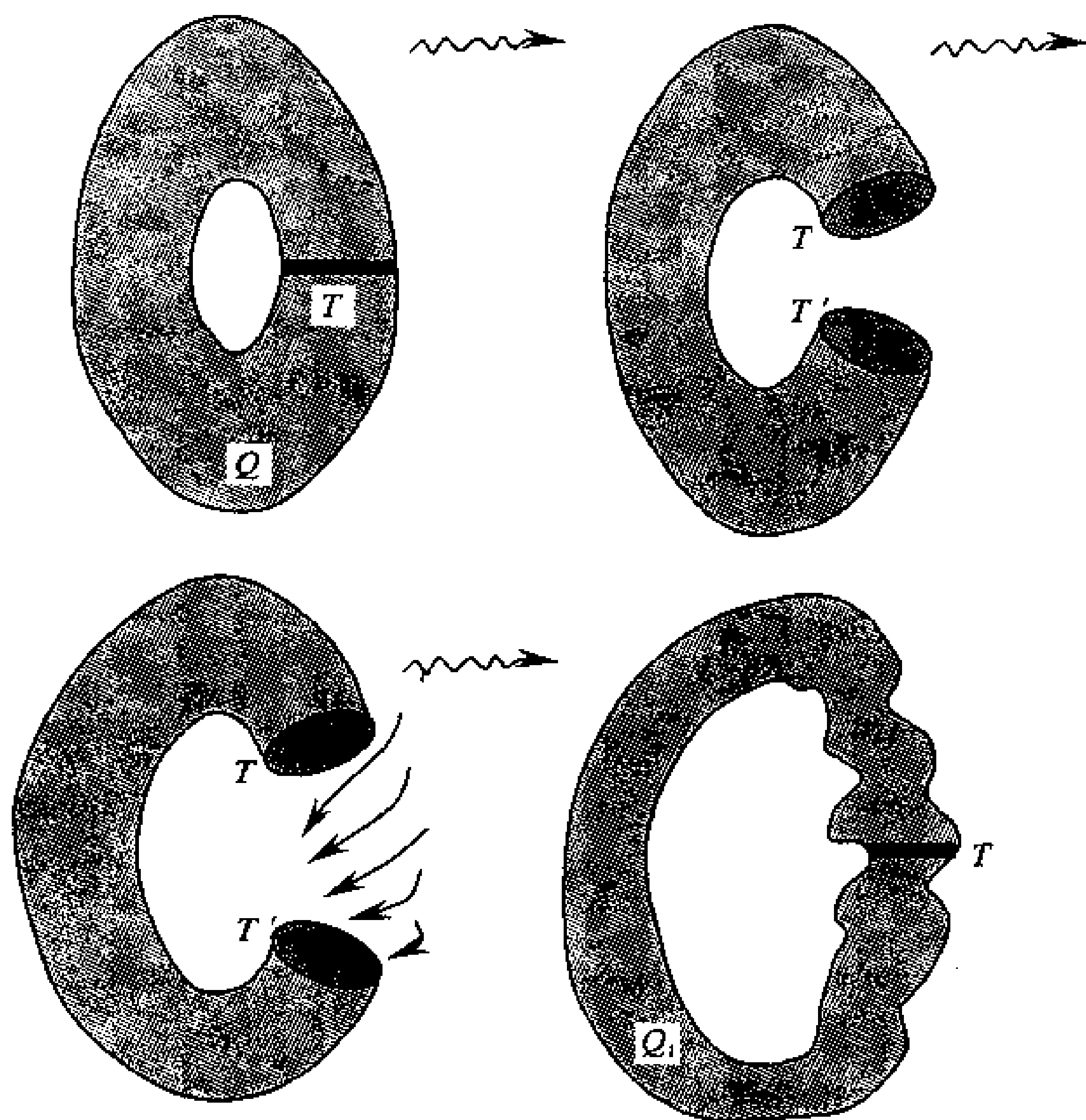


图 2.4

定义 2.4 设 H_1 和 H_2 是两个可积 Hamilton 系统，如果它们在能量面上的 Liouville 叶状结构可以沿某个 Liouville 环面扭曲而相互得到，那么称 H_1 和 H_2 粗等价(roughly equivalent).

定义 2.5 可积 Hamilton 系统的一个粗等价类，称为该系统的一个构架.

易见，粗等价是拓扑等价的.

构架的概念同下述几何构架的概念有关：

定义 2.6 设 P 是一个紧致可定向的 2 维闭曲面，K 是 P 上的一个图(graph). 假定 K 满足下面几条性质(见图 2.5)：

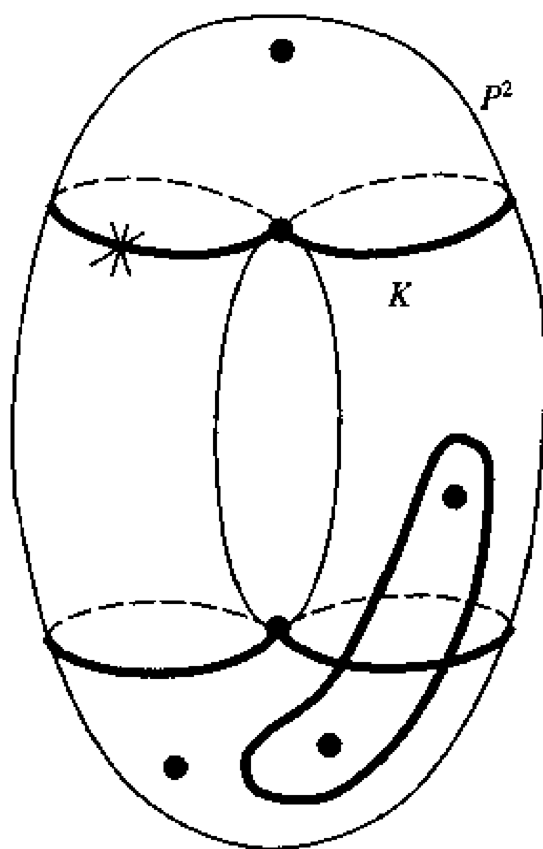


图 2.5

(1) K 中的每个顶点要么是孤立点，要么顶点次数为 2 或 4；

(2) K 在 P 中的余集 $P-K$ 同胚于有限个开圆环 $S^1\times(0,1)$ 的并；

(3) K 中任一个可作为 $S^1\times(0,1)$ 边界的环路(圆)的定向同曲面 P 的定向相容,即该环路作为两个圆环 $S^1\times(0,1)$ 的公共边界时恰好具有相反的两个定向;

(4) 除了 P 为环面时 K 仅是一个无顶点的环路外,图 K 一般不含无顶点的环路(或圆),

那么称偶对 (P,K) 是一个几何构架.

几何构架的提出,是以下述事实为背景的:

命题 2.2　对于能量面 E 上的一个 Bott 积分 f,可构造相应的图 K,使得 K 中的孤立顶点代表 f 在 E 上的极大值圆和极小值圆;K 中的其它连通分支对应着积分 f 的临界水平集的连通分支,这些连通分支都含有鞍临界圆. 于是,每一鞍临界圆都有 K 中的非孤立顶点与之对应.

关于可积 Hamilton 系统的构架,下述定理是基本的:

定理 2.5　所有可积 Hamilton 系统的构架与所有几何构架之间存在自然的一一对应.

证明　仅考虑能量面 E 是紧致的情形. Hamilton 系统 H 在能量面 E 上有 Liouville 意义下的 Bott 积分 f,则 f 与 H 一起赋予 E 一个 Liouville 叶状结构. 由于 f 是 Bott 积分,所以奇异的 Liouville 叶(或纤维)都是圆,因此,由 Liouville 叶状结构可导致 E 的一个以圆 S^1 为叶(纤维)的叶状结构,其中 f 的临界圆都是该结构的叶. 将 E 中每一个圆叶视为一点而得到的商拓扑空间是一个 2 维闭曲面 P,则 f 的包含临界点的水平集连通分支在商拓扑下就变成曲面 P 中的一个图 K,K 的顶点对应着 f 的临界圆,顶点之间的连线对应着 f 的水平集族中那些包含临界圆的连通分支中的 Liouville 环面 T^2. 显然,在此商拓扑下有一个自然的一一对应关系.

上面的证明只给出了一种直观的说明,一个严格的证明是在实心环体的 Seifert 纤维化理论上建立起来的(参见 Fomenko 的

文章[17]).

定义 2.7 令 $v=\text{sgrad}\ H$ 是 3 维可定向闭流形 E 上的可积 Hamilton 系统(即 E 是 H 的一个能量面),f 是 v 在 E 上的 Bott 积分. 以 m 表示 f 在 E 上的临界(极大、极小、鞍)圆的个数,以 n 表示 E 去掉 f 的所有包含临界点的水平集连通分支后余集的连通分支个数. 则偶对(m,n)称为可积 Hamilton 系统 v 的复杂度.

易见,当 E 去掉 f 的包含临界点的连通分支(包括孤立的临界圆和水平集中含鞍圆的连通分支)后,其余集是有限多个开流形的并,其中每一开流形都同胚于 $S^1\times S^1\times(0,1)$.

由复杂度的定义可以看出,两个粗等价的可积 Hamilton 系统的复杂度是一样的. 这是由于两个粗等价可积 Hamilton 系统的 Liouville 叶状结构在拓扑等价意义下是相同的,因而相应的奇异 Liouville 纤维(即非 Liouville 环面纤维)的个数是一样的. 由此可见,复杂度是可积 Hamilton 系统构架的不变量.

注 可积 Hamilton 系统的复杂度概念自然而然地反映出了 Hamilton 微分方程系统的深层性质. 从可积系统的辛拓扑角度来看,这种概念的出现是顺理成章的事.

定义 2.8 几何构架(P,K)的复杂度定义为偶对(m,n),其中,m 是 K 的顶点数,n 是 $P-K$ 的连通分支个数.

由前述讨论知,若两个可积 Hamilton 系统有相同的构架,则它们的复杂度相同,反之,若两个可积 Hamilton 系统有一样的复杂度,那么它们的构架是否一样呢? 根据定理 2.5,人们不难通过对偶对(m,n)构造不同的几何构架(P',K')与(P,K),使得(P',K')与(P,K)有相同的复杂度(m,n),从而对刚才的问题做出否定的回答. 不过,我们有下面的结论:

定理 2.6 具有给定复杂度(m,n)的可积 Hamilton 系统的构架个数是有限的.

证明 由几何构架的定义知,具有给定复杂度(m,n)的几何

构架(P,K)(注意,P 是可定向闭曲面)的个数必是有限的,于是由定理 2.5 可推出本定理.

2.6　具体 Hamilton 系统的讨论

本节中,我们将对两个具体的可积 Hamilton 系统讨论有关能量面的拓扑与 Bott 积分等问题.

3 维刚体运动

Euler 情形

我们考虑一类刚体动力学,即保持质心不动的刚体的惯性运动,其运动方程如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \Omega \times M = 0, & (2.1) \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \Omega \times V = 0, & (2.2) \\ M = A\Omega. \end{cases}$$

其中,$\Omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$是刚体的角速度向量,$M$ 是角动量向量,V 是单位动径向量,"×"表示向量的叉积,A 是惯性算子:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

易见,有

$$M = (A_1\omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3),$$

于是方程(2.1)变为

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = 0, \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 = 0, \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

在 Euler 情形下，A_1，A_2 与 A_3 彼此互不相同，不妨设 $0<A_1<A_2<A_3$. 上述方程有一个所谓的几何积分 $\langle V,V\rangle=1$（常数），此外，由 V 和 Ω 的意义知 $\langle V,M\rangle=c$，c 为常数.

易见，上述方程可视为 4 维流形 M^4：

$$\begin{cases} s = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \\ G = A_1\omega_1 v_1 + A_2\omega_2 v_2 + A_3\omega_3 v_3 = c \end{cases} \tag{2.4}$$

上的一个 Hamilton 系统. 显然，M^4 等价于 S^2 上的切丛 TS^2.

此外，上述方程有 2 个首次积分

$$H = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2, \tag{2.5}$$

$$f = A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2, \tag{2.6}$$

其中，第 1 个积分表示能量守恒，第 2 个积分表示动量守恒.

利用直接代入法或 Lagrange 乘数法，可求得当 $c\neq 0$ 时 Hamilton 函数 H 的临界值分别为

$$h_1 = \frac{c^2}{A_3},$$

$$h_2 = \frac{c^2}{A_2},$$

$$h_3 = \frac{c^2}{A_1}.$$

可以证明（参见本书第 6 章）如下结论：

命题 2.3 设 h 是函数 H 的正则值，E_h 是 H 在 M^4 上对应于 h 的能量面，那么

(1) 当 $h\in(h_1,h_2)$ 时，E_h 同胚于两个不相交球面 S^3 的并；

(2) 当 $h\in(h_2,h_3)$ 时，E_h 同胚于 $S^1\times S^2$；

(3) 当 $h\in(h_3,\infty)$ 时，E_h 同胚于射影空间 RP^3.

此外，有下述结论：

命题 2.4 在 Euler 情形下，积分 f（即(2.6)式）在 H 的所有非奇异能量面上都是 Bott 函数，f 在能量面上的临界子流形都是

非退化临界圆.

Kovalevskaya 情形

考虑具有外力的刚体运动,其运动方程如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+\Omega\times M=q\times\operatorname{grad}V,\\ \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=q\times\Omega,\\ M=A\Omega,\\ A=\operatorname{diag}(A_1,A_2,A_3),\end{cases}\tag{2.7}$$

这里,"×"表示向量的叉积,V 是势函数. 该系统有如下首次积分:

$$F=\langle q,q\rangle=q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2=1,$$

$$G=A_1\omega_1q_1+A_2\omega_2q_2+A_3\omega_3q_3=c,$$

$$H=\frac{1}{2}(A_1\omega_1{}^2+A_2\omega_2{}^2+A_3\omega_3{}^2)+V(q)=h,$$

并且 H 是该系统的 Hamilton 函数.

当 $A_1=A_2=2A_3$ 且 $V(q)=-q_1$ 时,就是熟知的 Kovalevskaya 情形的刚体运动. 此外,另一个首次积分具有形式

$$f=(\omega_1{}^2-\omega_2{}^2+q_1)^2+(2\omega_1\omega_2+q_2)^2.$$

系统(2.7)可视为 Hamilton 函数 H 在 4 维流形 M^4:

$$\{F(q,q)=\langle q,q\rangle=1,\ G(\Omega,q)=c\}$$

上确定的 Hamilton 系统,并且以 f 为其第 2 个首次积分.

易见,M^4 微分同胚于球的切丛 TS^2.

关于上述 Hamilton 系统,有如下断言:

命题 2.5　对于动量映射$(H,f):M\to R^2$,其分支图是非空集合. 对于 H 的不同正则值 c,当 $0<c^2<\dfrac{1}{2}$及$\dfrac{1}{2}<c^2<\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$时,$H$ 的能量面有 2 类,它们分别同胚于球面 S^3 和射影空间 RP^3;当

$\frac{4}{3\sqrt{3}}<c^2<1$ 及 $c^2>1$ 时，H 的能量面有 3 类，它们分别同胚于 S^3，RP^3 与 $S^1\times S^2$.

关于上述问题的详细讨论，可参考 M. P. Charlamov 及 A. A. Oshemkov 的工作[19,34].

Toda 链

经典的周期 Toda 链具有如下 Hamilton 函数：

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\exp(x_i-x_{i+1})+\exp(x_n-x_1).$$

当 $n=2$ 时，有如下结论：

命题 2.6 考虑 R^4 上的 Hamilton 函数：

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+c_1\exp(x_1-x_2)+x_2\exp(x_2-x_1), \tag{2.8}$$

其中，$c_1,c_2>0$. 那么

(1) 存在(2.8)式的第 2 个首次积分

$$f=p_1+p_2,$$

并且满足

$$\{f,g\}=0;$$

(2) 对任意 H 的正则值，能量面都同胚于 $S^2\times R^1$；

(3) f 在除了对应于 H 在 R^4 上极小值的能量面外的其它能量面上都是一个 Bott 积分.

命题 2.7 设 R^4 上的 Hamilton 函数 H 具有形式

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\exp(x_1-x_2)+\exp(x_2)+\exp(-x_1-x_2), \tag{2.9}$$

那么

(1) 存在(2.9)式的一个首次积分

$$\begin{aligned} f = & (p_1 p_2 - \exp(x_1 - x_2) + \exp(-x_1 - x_2))^2 \\ & + 2\exp(x_2)(p_1{}^2 + \exp(x_1 - x_2) \\ & + \exp(-x_1 - x_2)); \end{aligned}$$

(2) H 的非退化能量面都同胚于3维球面 S^3;

(3) f 在除了对应于 H 在 R^4 上极小值的能量面外的其它能量面上都是一个 Bott 积分.

关于(2.8)式和(2.9)式的映射的分支图与几何构架等详细讨论,可参见 L. S. Polyakova 的工作[19].

第 3 章　可积 Hamilton 系统能量面的拓扑构造与分类

3.1　可积 Hamilton 系统能量面的 (H) 类、(R) 类与 (S) 类

可积 Hamilton 系统的能量面类的概念是俄罗斯(前苏联)学派在研究可积 Hamilton 系统的辛拓扑与 Liouville 环面分布时提出的，其主要代表人物当推 A. T. Fomenko 与 S. V. Matveev 等人. 这些概念不仅在 Hamilton 系统的辛拓扑研究中起着十分重要的作用，而且对 3 维流形的理论研究本身也大有益处.

现在分别介绍 (H) 类、(R) 类与 (S) 类的概念.

定义 3.1　令 (M) 表示所有紧致连通的可定向的 3 维闭(无边)流形组成的集合. 任取 $M^3 \in (M)$，定义 $M^3 \in (H)$ 类，当且仅当 M^3 可作为某个在 Liouville 可积意义下具有 Bott 积分的 Hamilton 函数的能量面.

定义 3.2　任取 $M^3 \in (M)$，定义 $M^3 \in (R)$ 类，当且仅当 M^3 上容许一个圆 Morse 函数(round Morse function).

注　一个 n 维流形 M^n 上的光滑函数，当其临界点集合仅由非退化临界圆(即简单闭曲线)组成时，就叫做圆 Morse 函数.

定义 3.3　取 $M^3 \in (M)$，定义 $M^3 \in (S)$ 类，当且仅当 M^3 上有一圆 Morse 函数具有性质：该函数的所有非奇异(即正则)水平集是互不相交的环面的并集.

上面介绍的几类流形的深入研究同3维流形的拓扑理论是密切相关的，比如，(H)类中的流形都是由几种类型的“基块”(building blocks)粘合而成的，其中这些“基块”是一些最基本的3维流形；而(S)类则同 Seifert 叶状结构及 Dehn 流形等密不可分.

3.2　能量面的基块

在这一节中，我们将具体说明5种类型的简单基块的几何构造，任一可积 Hamilton 系统的能量面都可由这些基块粘拼得到.

以 D^n 表示 n 维圆盘，即 $D^n=\{x\in R^n \mid \| x \| \leqslant 1\}$.

类型1　实环体 $S^1\times D^2$(参考文献[18]中称为 full torus)，其边界是一个环面 T^2. 其形状如图3.1所示.

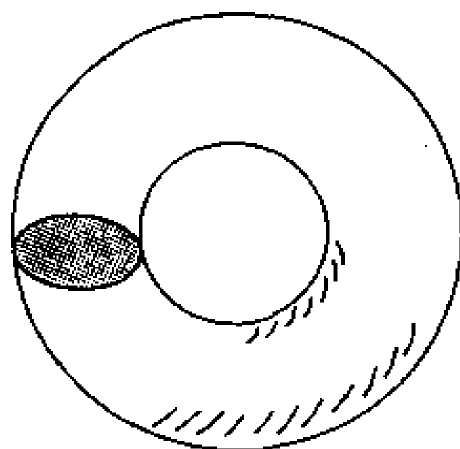


图 3.1

类型2　空心环体 $T^2\times D^1$(参考文献[19]中称为 cylinder)，其边界是两个环面. 注意，$T^2\times D^1$ 可以由从 $S^1\times D^2$ 中挖去一个小的 $S^1\times D^2$ 得到. 其形状如图3.2所示.

类型3　双空心环体 $N^2\times S^1$(参考文献[19]中称为 oriented saddle)，其中，N^2 是由 D^2 中挖去两个洞(小 D^2)而得到的，其边界由3个环面组成. 在欧氏空间 R^3 中，其形状如图3.3所示.

类型 4 在实心环体 $S^1\times D^2$ 中构造一个细的实心环体 $S^1\times D_m^2$，使得 $S^1\times D_m^2$ 在 $S^1\times D^2$ 中沿 $S^1\times\{0\}$方向环绕两周，然后在

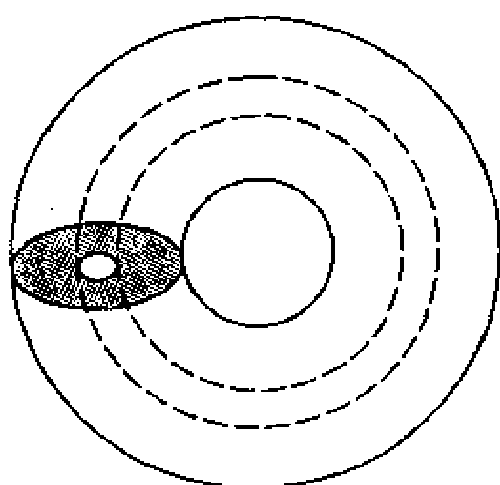


图 3.2

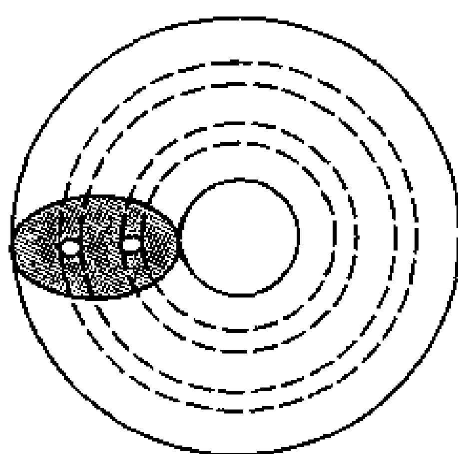


图 3.3

$S^1\times D^2$ 中挖去 $S^1\times D_m^2$，如此得到的 3 维有边流形称为双绕空心环体(参考文献[19]中称为 non-orientable saddle)，以 $N^2\widetilde{\times}S^1$ 表示，其边界由两个环面组成. 在欧氏空间 R^3 中，其形状如图 3.4 所示.

类型 5 令 K^2 表示 Klein 瓶，则 K^2 与 D^1 的斜积 $K^3=K^2\widetilde{\times}$

D^1 称为 Klein 环体. 流形 K^3 在 R^3 中可作为浸入在 R^3 中的 Klein 瓶 K 的管状邻域得到. 其形状如图 3.5 所示.

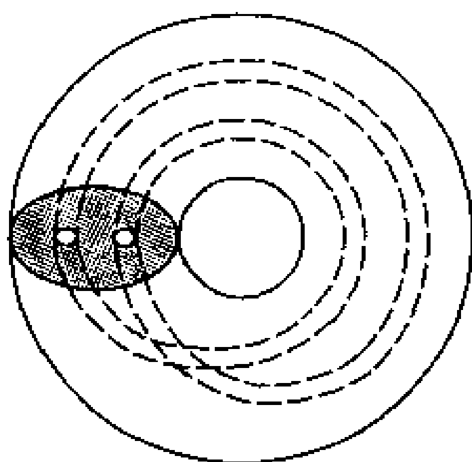


图 3.4

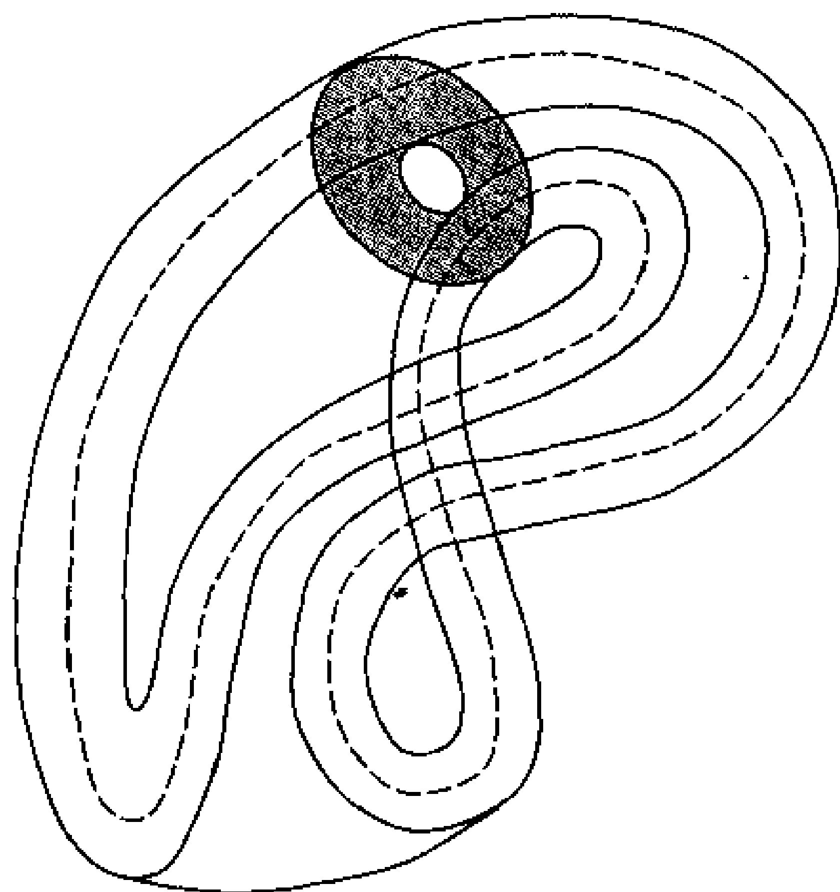


图 3.5

将上述 5 种类型的 3 维基块分别以 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ 表示，它们都是可定向的 3 维流形(见参考文献[17]).

注意 这 5 种类型的基块并不拓扑独立，Ⅱ，Ⅳ，Ⅴ 都可由有限个 Ⅰ 及 Ⅲ 相"加"而成，其中，"加"(+)表示流形沿着边界运用微分同胚做粘合"运算". 不过类型 Ⅱ，Ⅳ，Ⅴ 具有实际意义，它们对应着力学系统中一类有趣的动力学行为，对分析 Hamilton 系统的轨道十分有益.

引理 3.1 基块 Ⅴ 与基块 Ⅳ 有如下形式：

$$\begin{aligned} \text{V} &= K^3 = K^2 \widetilde{\times} D^1 = 2 \times \text{I} + \text{III} \\ &= 2(S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1), \\ \text{IV} &= \text{I} + \text{III} = (S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1). \end{aligned}$$

3.3 可积 Hamilton 系统能量面拓扑构造的基本定理

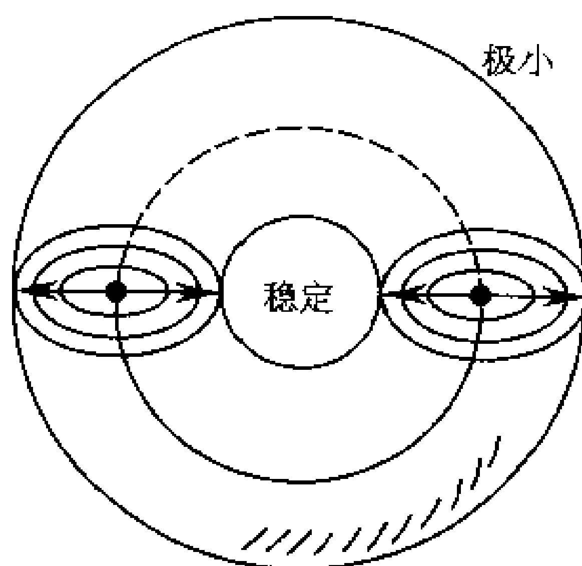
这一节我们将介绍可积 Hamilton 系统能量面的拓扑构造的几个基本定理，这些工作主要是由俄罗斯(前苏联)学派的领头人 A. T. Fomenko 完成的.

首先，让我们回顾一下有关的基本概念.

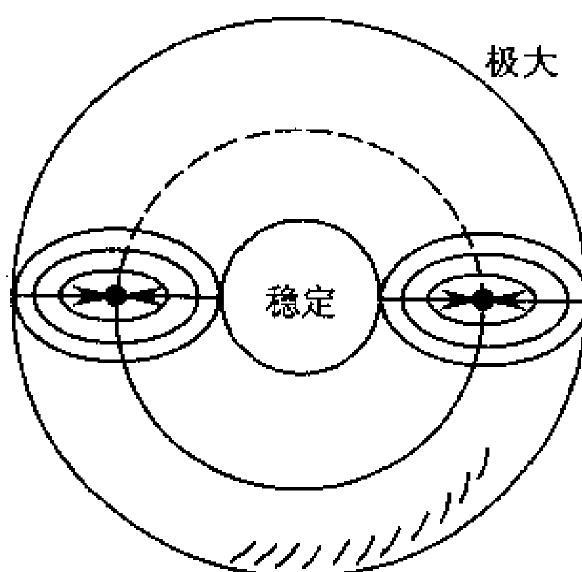
定义 3.4 令 r 是流形 M^3 上一系统的周期解，如果存在 r 的一个管状邻域，使得该邻域可以表示为给定系统的不变环面(加上 r 本身)的集合，即所有在 r 的管状邻域中的轨道都位于给定系统的一个不变环面上(这些环面以 r 为公共轴)，那么称 r 是稳定的. 如图 3.6 所示.

易见，轨道 r 稳定意味着存在着一个同 r 横截的足够小的 2 维圆盘，以 r 上一点为圆心，使得该圆盘"纤维化"成一族同心圆，其中每一个圆都是相应的 Poincaré 映射的不变集. 对于可积

Hamilton 系统来说，上述定义同传统的稳定概念一致. 由于 Hamilton 系统的第 2 个首次积分 f 在能量面上的非奇异水平集都是环面，故积分 f 在 r 上取极小值或极大值，从而 r 是 f 的一个临界圆.



(a)



(b)

图 3.6

定义 3.5 设 f 是光滑流形 M 上的一个光滑函数，L 是 f 的一个临界子流形. 对 M 上一给定的 Riemann 度量，考虑 f 的梯度场 grad f. L 的分界图(separatrix diagram)定义为向量场 grad f 的所有正向趋于 L 的积分轨道和所有负向趋于 L 的积分轨道的集合之并，前者称为 L 的稳定分界图，后者称为 L 的不稳定分界图. 若稳定分界图与不稳定分界图同时非空，则称 L 是鞍形临界流形(saddle). 如图 3.7 所示.

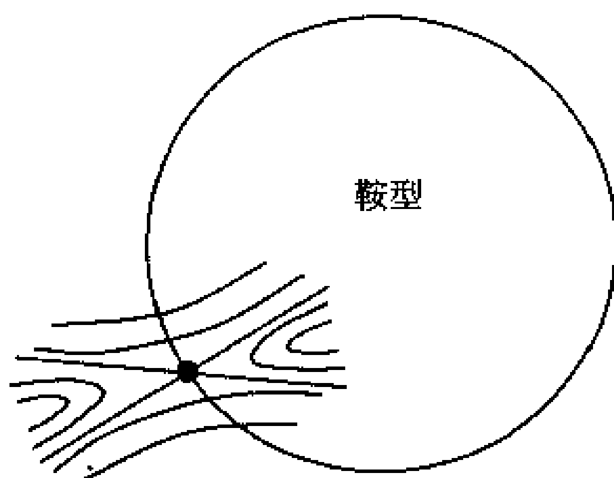


图 3.7

显然，在临界流形 L 的一个小的管状邻域中，这两类分界图都是光滑子流形，并且可能定向也可能非定向. 在 M 的维数为 3 的情况下，若 L 有分界图，则 L 必是一个 1 维子流形，从而是一个圆. 若定向，则分界图是柱面；若非定向，则分界图是 Möbius 带.

现在叙述有关的基本定理.

设 M^4 是一个光滑辛流形，$v=\text{sgrad } H$ 是 M^4 上的一个 Hamilton 系统. v 在某个 3 维非奇异能量面 E 上是 Liouville 可积的，并且第 2 个首次积分 f 是 Bott 积分(H 是 v 的第 1 个首次积分)；令 m 表示 v 在 E 上这样的周期轨道个数：其上 f 取极值，即这些周期轨道是 f 的指数为 0 或 2 的临界子流形(见 1.11 节)；p 表示 f 在其上取极值的 2 维临界环面的个数；q 表示 f 的指数

为 1 且分界图可定向的临界圆的个数；s 表示 f 的指数为 1 且分界图非定向的临界圆的个数；而 r 表示 f 的临界 Klein 瓶的个数. 这些数由已知 Bott 积分唯一确定.

定理 3.1　能量面 E 由 m 个基块 Ⅰ，p 个基块 Ⅱ，q 个基块 Ⅲ，s 个基块 Ⅳ 和 r 个基块 Ⅴ 通过适当的边界环面的微分同胚粘合而成：

$$\begin{aligned} E &= m\,\mathrm{I} + p\,\mathrm{II} + q\,\mathrm{III} + s\,\mathrm{IV} + r\,\mathrm{V} \\ &= m(S^1 \times D^2) + p(T^2 \times D^1) + q(N^2 \times S^1) \\ &\quad + s(N^2 \,\widetilde{\times}\, S^1) + r(K^2 \,\widetilde{\times}\, D^1). \end{aligned}$$

其中，加号“+”表示适当的边界环面的微分同胚所定义的粘合“运算”.

定理 3.2　任意具有形式

$$M = m\,\mathrm{I} + p\,\mathrm{II} + q\,\mathrm{III} + s\,\mathrm{IV} + r\,\mathrm{V}$$

的紧致可定向的 3 维流形 M 都可以作为某个辛流形 M^4 上的一个适当的 Hamilton 函数的能量面，并且此 Hamilton 函数有一个 Bott 积分 f. 进一步，M 的表示形式与对应的 Bott 积分 f 的基块分解正好一致.

关于上述定理的详细证明，可参见参考文献[17]与[19].

例 3.1　设球面 S^3 是某可积 Hamilton 系统的能量面，且 Bott 积分 f 有 2 个临界圆，使 f 在其上分别取极大值与极小值，则有

$$S^3 = 2\,\mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{I} = S^1 \times D^2 + S^1 \times D^2,$$

即 S^3 可由 2 个实心环体沿边界(按某个微分同胚)粘合而得到. 熟悉拓扑学的读者都了解这个事实.

假定能量面 E 有形式

$$E = 2\,\mathrm{I} = S^1 \times D^2 + S^1 \times D^2,$$

则由拓扑学的知识知，根据边界微分同胚选择的不同，E 有 3 种不

同的形式：

(1) $E \approx S^1 \times S^2$;

(2) $E \approx S^3$;

(3) $E \approx RP^3$(3 维实射影平面).

这 3 种情形在实际中都可能遇到，比如，RP^3 就对应着高速运动的重刚体运动方程的能量面.

定理 3.3 设 E 是具有 Bott 积分的 Hamilton 系统 $v=\operatorname{sgrad} H$的紧致非奇异能量面，那么 E 可有表达式

$$E = \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{III} = \alpha(S^1 \times D^2) + \beta(N^2 \times S^1),$$

其中，α 与 β 都是非负整数，并且与定理 3.1 中的 m,p,q,s,r 有如下关系：

$$\alpha = m + p + s + 2r,$$
$$\beta = q + s + r + p.$$

该定理表明，从拓扑意义上看，E 只需由有限个基块 I 与基块 III 沿着环面边界进行适当的粘合就可得到.

同样，有下述结论：

定理 3.4 一个紧致可定向的 3 维流形 M 若具有形式

$$M = \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{III},$$

则 M 可作为某个辛流形 M^4 上具有 Bott 积分的 Hamilton 系统的能量面.

于是，一个紧致可定向的 3 维流形是某个具有 Bott 积分的 Hamilton 系统的能量面，当且仅当该流形具有形式 $\alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{III}$，其中，$\alpha,\beta$ 是非负整数.

根据上述定理，我们可得到一个 Hamilton 系统在某个能量面上不可积(没有 Bott 积分)的一个条件.

推论 3.1 如果某个 Hamilton 系统 $v=\operatorname{sgrad} H$ 的能量面 E 不可能表示为 $\alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{III}$，那么 v 在 E 上(在 Bott 积分类中)不可积.

根据上述定理，A. T. Fomenko 与 S. V. Matveev[19]推出了下面一个重要结论：

定理 3.5　设 E 是某一个 Hamilton 系统 H 的非奇异能量面，若 E 同时也是一个紧致双曲流形，那么 H 在 E 上(在 Bott 积分类中)不可积.

定理 3.5 中的双曲流形定义如下：

定义 3.6　若一个光滑流形 M 可赋予一 Riemann 度量，使得 M 的截面曲率是一个负常数，那么称 M 是一个双曲流形.

关于双曲流形，有如下重要结论：

定理 3.6　假定 L 是 3 维流形 M^3 中的一个环链，使得 $M-L$ (或 $e(L)$，见 1.14 节)具有一个双曲结构，那么大多数通过对 M^3 沿 L 进行 Dehn 手术而得到的流形都具有双曲结构.

进一步，由 W. P. Thurston 的工作知，"绝大多数"闭 3 维流形都是双曲的. 由此可见，定理 3.6 从拓扑的观点说明了可积 Hamilton 系统的"稀少"性.

让我们回顾一下 Haken 流形的概念.

定义 3.7　设 M^3 是一个闭 3 维流形，如果 M 是素流形，并且 M 中包含一个双边的不可压缩的且异于 2 维球面的曲面，那么称 M^3 是一个 Haken 流形.

关于 Haken 流形，有如下断言：

设 M^3 是一个闭的 Haken 流形，那么 M^3 有一双曲结构当且仅当其具有如下性质：若任一映射 $f:T^2\to M^3$ 诱导出的基本群的映射是单射，则 f 同伦于边界 ∂M 的包含映射.

3.4　(H)类、(R)类与(S)类之间的关系

由前面的定义知，(H)类是那些可作为某个 Hamilton 系统的能量面且容许一个 Bott 积分的 3 维流形组成的类，(R)类是容许

有圆 Morse 函数的可定向的紧致 3 维闭流形组成的类，而(S)类是那些容许圆 Morse 函数，且该 Morse 函数的非奇异水平集都是环面的 3 维流形组成的类. 首先给出下述关系：

定理 3.7　(H)类流形具有如下性质：

(1) 如果 $Q_1\in(H)$，$Q_2\in(H)$，那么

$$Q=Q_1\#Q_2\in(H);$$

(2) 如果 $Q\in(H)$，$Q=Q_1\#Q_2$，那么

$$Q_1\in(H),\quad Q_2\in(H).$$

有关的详细讨论参考 A. T. Fomenko 等人的文章[17].

命题 3.1　(1) $(S)\subset(R)$；

(2) $(H)\subset(R)$.

证明　(1)是显而易见的，我们在此只证明(2).

由 S. Miyoshi[39], J. Morgan[40], D. Asimov 等人的工作知，每一个(H)类流形上都存在一个圆 Morse 函数，从而属于(R)类. 另一方面，由 J. Morgan 关于 3 维流形的理论知，如果 M 是一个 3 维流形，那么存在一个充分大的 n，使得下面的连通和

$$M\#(\mathop{\#}_{i=1}^{n}S^1\times S^2)$$

属于(R)类. 现在取 $M_1\notin(H)$(比如取 M_1 为双曲流形)，则

$$M_1\#(\mathop{\#}_{i=1}^{n}S^1\times S^2)$$

属于(R)类但不属于(H)类. 否则，由定理 3.7 知，M_1 应属于(H)类，与 M_1 的取法矛盾，故命题成立.

上述命题的意义在于，若欲知晓(H)类或(S)类的拓扑，可以先研究(R)类的拓扑. 而对(R)类的研究，则可借助于经典 Morse 函数理论的思想方法，利用圆 Morse 函数进行讨论. 为此，人们对圆 Morse 函数建立了一套类似的 Morse 理论，详情可参考第 5 章.

现已知道，(S)类与(H)类都是(R)类的一个子类，一个自然

的问题是，(S)类与(H)类的关系怎样？下面的定理对此做出了确定的回答：

定理 3.8 (H)类与(S)类相同.

由此定理知，如果想弄清可作为可积 Hamilton 系统能量面(具有 Bott 积分)的 3 维流形的拓扑，只需研究具有一类特殊的圆 Morse 函数的 3 维流形的拓扑.

定理 3.8 的证明思想是这样的：一个 3 维流形 M 属于(S)类，当且仅当该流形可由若干 Ⅰ 类基块和若干 Ⅱ 类基块沿边界利用微分同胚粘合而成，即当且仅当

$$M = \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{II}.$$

而我们早已知道(H)类的流形也具有此性质，故这两类流形相同. 关于该定理的详细证明，见第 5 章及 Matveev 等人的原始论文[34].

关于(H)类和(R)类，还有如下结果：

定理 3.9 设(I)类表示不可约 3 维流形组成的集合，则有

$$(H) \cap [(\mathrm{I}) - \{S^1 \times S^2\}] = (R) \cap [(\mathrm{I}) - \{S^1 \times S^2\}].$$

3.5 可积 Hamilton 系统的构架

本节将讨论可积 Hamilton 系统的一种新的拓扑不变量：一个 2 维曲面 P 及其上面的一个图 K(见 2.5 节)构成的构架(P,K). 每一个构架(P,K)都与 Hamilton 系统的一个可积能量面 Q 相关联. 下面就具体讨论(P,K).

假定 $f:Q\to R$ 是一个 Bott 积分，c 是 f 的一个临界值. 令 f_i 表示奇异水平集 $f^{-1}(c)$的一个连通分支，而 C_i 表示 f 在 f_i 中的临界点集.

显然，有如下事实：

命题 3.2 临界点集 C_i 可有下面几种类型：

(1) C_s 是极值圆 S^1，即 f 在 S^1 上取极小值或极大值，此时，$C_s=f_s=S^1$；

(2) C_s 是极值环面 T^2，此时，$f_s=C_s=T^2$；

(3) C_s 是一伴随有向分界图的鞍临界圆 S^1，此时，$C_s=S^1\neq f_s$；

(4) C_s 是一伴随着不可定向分界图的临界圆 S^1，此时，$C_s=S^1\neq f_s$；

(5) C_s 是一极值 Klein 瓶 K^2，此时，$C_s=f_s=K^2$.

设 c 是 f 的一个临界点，给定一充分小的 $\varepsilon,\varepsilon>0$，考虑集合

$$U(f_s) = f^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon],$$

则 $U(f_s)$的边界由互不相交的 Liouville 环面组成. 于是，对应着上面命题 3.2 中 f_s 的不同类型，$U(f_s)$有相应的类型，具体如下：

定理 3.10 设 Q 是 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad}\ H$ 的紧致非奇异能量面，并且在 Q 上有一个 Bott 积分 f，那么

$$Q = \sum_s U(f_s),$$

其中，s 对所有的奇异水平集的全部连通分支标号. 每一个 $U(f_s)$ 具有下述 5 种类型之一：

(1) $U(f_s)=P_s^2\times S^1$，其中，$P_s^2=D^2$；

(2) $U(f_s)=P_s^2\times S^1$，其中，$P_s^2=S^1\times[0,1]$；

(3) $U(f_s)=P_s^2\times S^1$，其中，P_s^2 是某个带边曲面；

(4) $U(f_s)=P_s^2\tilde{\times} S^1$，其中，$P_s^2$ 是某个带边曲面，而 $P_s^2\tilde{\times} S^1$ 表示以 P_s^2 为底空间、以 S^1 为纤维的 Seifert 丛. 注意，此时 $U(f_s)$中纤维化的实心环体是(2,1)型的；

(5) $U(f_s)=P_s^2\tilde{\times} S^1$，其中，$P_s^2$ 是 Möbius 带，$P_s^2\tilde{\times} S^1$ 表示 P_s^2 与 S^1 的斜积.

由定理 3.10 可得下面的主要结论：

推论 3.2 若 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad}\ H$ 在能量面 Q 上有一

个 Bott 积分 f，则 Q 有如下分解：

$$Q = \sum_s Q_s,$$

其中，每个 Q_s 都是以 P_s^2 为底空间、以圆 S^1 为纤维的 Seifert 纤维丛.

由上述结果知，能量面 Q 是由诸 Seifert 纤维丛 $Q_s(P_s^2 \times S^1, P_s^2 \times S^1)$ 沿着边界环面以适当的微分同胚粘合而成的，每个边界环面又都是以 P_s^2 的边界（圆）为底空间的纤维丛. 设 Q_s 的 Seifert 纤维化表示为

$$\pi_s: Q_s^3 \to P_s^2,$$

则 $\pi_s^{-1}(p)(p \in P_s^2)$ 是圆 S^1. 此外，设 Q 的分解中，Q_s 与 $Q_{s'}$ 是两个相邻的 Seifert 纤维丛，则存在 Q_s 与 $Q_{s'}$ 的边界环面的粘合微分同胚 λ，该微分同胚 λ 导出相应的 P_s^2 与 $P_{s'}^2$ 的边界圆之间的微分同胚 h（如图 3.8 所示），从而 Q 的一个分解 $Q = \sum_s Q_s$ 中诸 Q_s 的边界环面的粘合诱导出底空间 P_s^2 的一个粘合：

$$P^2 = \sum_s P_s^2.$$

由此，我们有如下断言：

推论 3.3　每一个具有 Bott 积分 f 的 Hamilton 能量面 Q 都有一个曲面

$$P^2 = P^2(H, Q, f) = \sum_s P_s^2$$

与之对应，其中，$\sum_s P_s^2$ 表示 Q 的分解 $Q = \sum_s Q_s$ 的边界粘合所诱导的诸底空间 P_s 的粘合.

现在考虑奇异水平集 $f^{-1}(c)$ 中临界集的连通分支 f_s. 显然，Q_s 实际上就是定理 3.10 中的 $U(f_s)$. 此外，$f_s \subset f^{-1}(c) \subset U(f_s)$.

定理 3.11　每个临界分支 f_s 都有一个 Seifert 纤维化

$$\pi_s: f_s \to K,$$

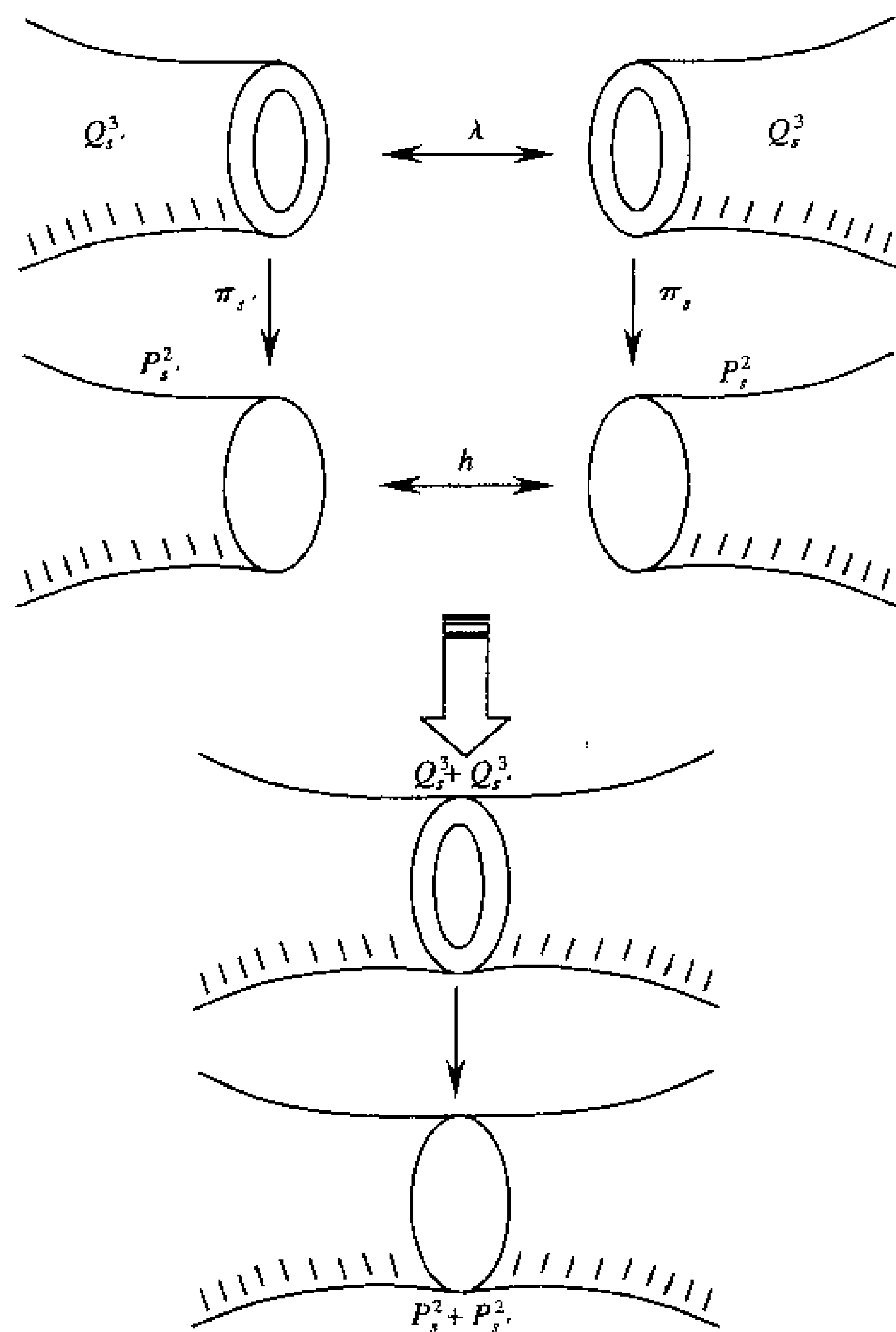


图 3.8

以 S^1 为纤维，以某个1维图 K_s 为底空间. 其中，纤维化 π_s 是 $\pi_s:Q_s\to P_s^2$ 在 f_s 上的限制. 特别地，有 $K_s\subset P_s^2$，且嵌入 $i_s:K_s\to P_s^2$ 由 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad }H$ 与 Bott 积分 f 唯一确定.

现在定义一个图 K 为

$$K=\sum_s K_s,$$

于是有下面的结论:

推论 3.4　若 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad }H$ 在其能量面 Q 上有一个 Bott 积分 f，则 H 与 f 唯一确定一个图 $K=\sum_s K_s$ 到曲面 $P=\sum_s P_s$ 的嵌入.

由此可见，几何构架 (P,K) 给出了可积 Hamilton 系统的可积能量面 Q 的一种刻画，从而对可积 Hamilton 系统的分类讨论提供了一种工具. 有关 (P,K) 的进一步讨论，可参见参考文献[20].

第 4 章　可积 Hamilton 系统能量面的拓扑与稳定周期解个数的下界估计

4.1　可积 Hamilton 系统能量面的同调性质

设 M^4 是一个 4 维辛流形，H 是 M^4 上的一个 Hamilton 系统. 考虑 H 在 M^4 中的一个 3 维能量面 E，我们知道，若 H 在 E 上有一个 Bott 积分，那么 E 的拓扑结构必有一定的限制，比如 E 应该可表示为 Ⅰ 类和 Ⅲ 类有边流形的"粘连"和，因此能量面 E 的拓扑可能成为 H 在 E 上存在 Bott 积分的障碍. 一个自然的问题是，究竟哪些拓扑性质使得 H 在 E 上(在 Bott 积分类中)的 Liouville 可积性遭到破坏? 特别地，E 的同调群对 H 在 E 上的可积性有影响吗? 不幸地是，对这个问题的回答是否定的.

定理 4.1　可定向的 3 维紧致流形的任一个整系数同调群都可通过将若干个 $N^2\times S^1$ 和 $D^2\times S^1$ 进行边界微分同胚粘合而实现.

换句话说，给定一个对应于一个可定向的 3 维紧致流形的整系数同调群，存在一个具有形式

$$M = \alpha(N^2 \times S^1) + \beta(D^2 \times S^1)$$

的 3 维可定向紧致流形 M，使得 M 的同调群就是给定的同调群. 由于 $M\in(H)$，因此单凭能量面 E 的同调群无法断定 H 在 E 上是否有 Bott 积分，从而需要更细致的拓扑不变量来区分可积能量面.

上面的定理可由 Seifert 流形理论推出，一个初等的证明参见 Fomenko 的书[20].

4.2 能量面的同调群及基本群与稳定周期解个数的下界估计

4.1 节已经说过，仅仅依据能量面的同调群的信息还无法获知一个 Hamilton 系统是否在其能量面上有 Bott 积分，因此还需要其它的信息，特别是 Hamilton 系统能量面以外的信息.

下面的结果揭示了下列 3 种对象之间的若干联系：

(1) 能量面 E 上 Bott 积分 f 的存在性；

(2) 能量面 E 上 Hamilton 系统的稳定周期解；

(3) 1 维整系数同调群 $H_1(E,Z)$ 或基本群 $\pi_1(E)$.

命 M^4 是一个光滑辛流形，$v=\mathrm{sgrad}\ H$ 是 M^4 上的一个 Hamilton 系统，v 在能量面 E 上有一 Bott 积分 f. 设 k 表示 v 在 E 上的稳定周期解的个数，r 表示 f 在 E 上的临界 Klein 瓶的个数，那么有下述结果：

定理 4.2(**Fomenko**[18]) 设 Bott 积分 f 在 E 上没有临界 Klein 瓶，则有结论：

(1) 若 $H_1(E,Z)$是有限群，则 $k\geqslant 2$；

(2) 若 $H_1(E,Z)$是无限群(等价地，有 rank $H_1\geqslant 1$)，则 Hamilton 系统 v 在能量面 E 上没有稳定周期解.

设 Bott 积分 f 在 E 上有临界 Klein 瓶，那么有结论：

(1) 若 $H_1(E,Z)$是有限群，则 $k+r\geqslant 2$；

(2) 若 $H_1(E,Z)$是有限循环群，则 $k\geqslant 1$.

关于 E 的基本群同稳定周期解的关系，有如下结果：

定理 4.3(**Fomenko**[18]) 设 Bott 积分 f 在 E 上没有临界 Klein 瓶，则有结论：

(1) 若基本群 $\pi_1(E)=Z$，则 $k\geqslant 2$；

(2) 若同调群 $H_1(E,Z)$有限，则 $k\geqslant 2$.

设 f 在 E 上有临界 Klein 瓶，那么有结论：

(1) 若 $\pi_1(E)=Z$，则 $k\geqslant 1$；

(2) 若 $\pi_1(E)$是有限群，则 $k\geqslant 1$.

上述结论中的稳定周期解的个数的下界估计在许多情况下是最好的. 例如，V. V. Kozlov 已给出的例子表明有些可积 Hamilton 系统在其能量面 $E\approx RP^3$ 上正好有 1 个稳定周期解，而有些系统在其能量面 $E\approx S^3$ 上正好有 2 个稳定周期解.

由于球面 S^3、射影空间 RP^3 及直积空间 $S^1\times S^2$ 在许多物理系统中出现(参见 2.6 节)，故作为上面定理的应用，我们具体给出有关结果.

推论 4.1 设某 Hamilton 系统 $v=\mathrm{sgrad}\ H$ 的具有 Bott 积分 f 的能量面 E 同胚于 S^3，RP^3 及 $S^1\times S^2$ 中的一个，那么有：

(1) 若积分 f 没有 Klein 瓶，则系统 v 在 E 上总有不少于 2 个的稳定周期解；

(2) 若积分 f 可能有 Klein 瓶，则当 E 同胚于 S^3 时，v 在 E 上的稳定周期解不少于 2 个；当 E 同胚于 RP^3 或 $S^1\times S^2$ 时，v 在 E 上的稳定周期解不少于 1 个.

Hamilton 系统周期解理论中有一个经典结果，就是如果 R^{2n} 上某给定的 Hamilton 函数 H 的某个能量流形(H 的水平集)E 是星形的(显然与 S^{2n-1} 同胚，则 H 在 E 上至少有 1 个非平凡周期解.

易见，对于 4 维辛流形 M^4 上的可积 Hamilton 系统，有关周期解存在性的结果更完美.

推论 4.2 若 v 在能量面 E 上无稳定周期解，并且 $H_1(E,Z)$ 是有限循环群，那么 v 在 E 上没有 Bott 积分.

此外，还有下面的重要推论：

推论 4.3 设 Hamilton 系统 $v=\text{sgrad } H$ 在能量面 E 上有 Bott 积分，并且 v 在 E 上没有稳定周期解，那么

(1) 同调群 $H_1(E,Z)$不是有限循环群；

(2) $\text{rank } \pi_1(E)\geqslant 2$，并且 $\pi_1(E)$中至少有 1 个生成元具有无限阶.

推论 4.4 如果系统 v 在能量面 E 上没有稳定周期解，并且 $\text{rank } \pi_1(E)\leqslant 1$，那么 v 在 E 上没有 Bott 积分.

最后强调一句，上述诸多问题的讨论主要是以圆 Morse 理论[34]为基础的，这是 Morse 理论的一种发展，这里的 Bott 函数的临界集合都是圆.

第 5 章　圆 Morse 函数与 Hamilton 能量面

在本章中，我们将首先系统地讲述圆 Morse 函数的存在性与光滑流形的拓扑之间的一些关系，然后阐述(S)类 3 维流形与 Hamilton 系统能量面的等价性.

5.1　圆 Morse 函数与最小恰当圆 Morse 函数

在第 1 章中我们已经介绍了圆 Morse 函数的概念，为了下面讨论方便，我们重新给出圆 Morse 函数与恰当(exact)圆 Morse 函数的定义.

为了更具一般性，我们考虑 $n+1$ 维有边的紧致光滑流形 M^{n+1}上的光滑函数.

设 $M^{n+1}(n>1)$的边界为

$$\partial M^{n+1} = \partial_+ M^{n+1} \cup \partial_- M^{n+1},$$

其中，$\partial_+ M^{n+1}$与 $\partial_- M^{n+1}$表示 M^{n+1}的不同定向的边界分支. 考虑一个光滑函数

$$f:(M^{n+1},\partial_+ M^{n+1},\partial_- M^{n+1}) \to ([0,1],\{0\},\{1\}),$$

令 $K(f)$表示 f 的临界点集合.

定义 5.1　光滑函数 f 称为圆 Morse 函数，如果 f 满足下述条件：

(1) $K(f)\cap \partial M^{n+1}=\varnothing$；

(2) $K(f)$由互不相交的圆组成，且 f 的零化数为 1.

数学家 Thurston 在讨论余维数为 1 的叶状结构时曾系统地运用了圆 Morse 函数的思想.

命 $F_\lambda(M^n)$ 表示流形 M^n 上具有最少个数的且指标为 λ 的临界圆的圆 Morse 函数集合，则恰当圆 Morse 函数定义如下：

定义 5.2　如果光滑函数 f 满足

$$f \in \bigcap_{\lambda=0}^{n} F_\lambda(M^n),$$

则称 f 是一个最小恰当圆 Morse 函数.

定义 5.3　如果一个流形 H 具有形式

$$H = S^1 \times D^n,$$

则称 H 是一个圆柄.

定义 5.4　如果光滑流形 M^{n+1} 可表示成

$$M^{n+1} = M_1^{n+1} \bigcup_\varphi S^1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda},$$

其中，$\varphi: S^1 \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to \partial_+ M_1^n$ 是一光滑嵌入，那么称 M^{n+1} 由 M_1^{n+1} 通过粘合指标为 λ 的圆柄得到.

定义 5.5　设 M^{n+1} 有一滤子

$$fi = \{M_0, M_1, \cdots, M_m = M^{n+1}\},$$

其中，每一个 M_i 都是余维数为 0 的子流形，并且

$$\partial_- M^{n+1} \times [0,1] = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M^{n+1},$$

而 M_i 是由 M_{i-1} 通过粘合一个圆柄而得到的，那么称 M^{n+1} 有一个圆柄分解. 注意，若 $\partial_- M^{n+1} = \varnothing$，则该滤子 fi 由一个指标为 0 的圆柄开始.

类似 Morse 函数的基本引理，关于圆 Morse 函数有如下结果：

定理 5.1　命 $f: M^{n+1} \to [0,1]$ 是一个圆 Morse 函数，$C \subset \text{Int}\, M^{n+1}$ 是 f 的一个临界圆，那么在 C 的一个邻域内存在两类坐标系，使得下面的断言成立：

(1) 平凡情形：存在一光滑嵌入 $\varphi: S^1 \times D^n(\varepsilon) \to \text{Int}\, M^{n+1}$ ($D^n(\varepsilon)$ 是半径为 ε 的 n 维球体)，满足 $\varphi(S^1 \times 0) = C$ 与

$$f\varphi(\theta, x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

其中，$(\theta,x)\in S^1\times D^n(\epsilon)$；

(2) 扭转情形：存在一光滑嵌入 $\psi:[0,1]\times D^n(\epsilon)/\sim\to \operatorname{Int} M^{n+1}$，满足 $\psi([0,1]\times 0/\sim)=C$ 与

$$f\psi(t,x)=-x_1^2-\cdots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_n^2,$$

这里，$(t,x)\in[0,1]\times D^n(\epsilon)/\sim$，而$[0,1]\times D^n(\epsilon)/\sim$中的等价关系～如下定义：

～通过定义粘合关系

$$(0,x_1,\cdots,x_\lambda,x_{\lambda+1},\cdots,x_n)\sim(1,-x_1,\cdots,-x_\lambda,x_{\lambda+1},\cdots,x_n)$$

将 $0\times D^n(\epsilon)$与 $1\times D^n(\epsilon)$恒同.

数 λ 称为临界圆 C 的指标.

定理 5.2 设 M^{n+1}是一个紧致连通的流形，那么下面两个条件等价：

(1) M^{n+1}上存在一个圆 Morse 函数；

(2) M^{n+1}有一个圆柄分解.

由定理 5.2 知，如果能够对一个流形找到一个圆柄分解，那么 M^{n+1} 上圆 Morse 函数的存在性自然就成定论. 注意，不同圆 Morse 函数对应不同的圆柄分解.

定理 5.1 表明，如果 M^{n+1}上有一个圆 Morse 函数 f，那么 f 在属于 M^{n+1}内部的临界圆附近有两种局部坐标表示：平凡的或扭转的. 一个自然的问题是，如果 M^{n+1}上有一个圆 Morse 函数 f，是否保证 M^{n+1}上存在一个在其临界圆附近仅有平凡局部坐标表示的圆 Morse 函数？

下面的定理回答了这个问题：

定理 5.3 如果一光滑流形 $M^{n+1}(n\geqslant 5)$上存在圆 Morse 函数 $f:(M^{n+1},\partial_-M^{n+1},\partial_+M^{n+1})\to[0,1]$，并且 M^{n+1}与 ∂M^{n+1}均单连通，则 M^{n+1}上必存在临界圆附近有平凡坐标系的圆 Morse 函数.

证明 该定理的证明分如下几步：

断言 1 若流形 M^{n+1}有一个分解

$$M^{n+1} = M_1^{n+1} + R_\lambda,$$

其中，R_λ 是指标为 $\lambda(\lambda\geqslant 1)$ 的一个圆柄，那么 M^{n+1} 可表示为

$$M = M_1^{n+1} + P_\lambda + P_{\lambda+1},$$

这里，P_i 表示普通的柄：

$$P_i = D^i \times D^{n+1-i}.$$

断言 1 的证明　只需证明一圆柄 $R_\lambda = S^1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ 可由一对指标分别为 λ 和 $\lambda+1$ 的普通柄表示. 首先令

$$\varphi: S^1 \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to \partial M_1^{n+1}$$

是一粘合映射. 将集合 $S^1\times 0\times 0$ 分解成 $I_1\times 0\times 0$ 与 $I_2\times 0\times 0$（其中，I_1 与 I_2 是两个区间），使得

$$S^1 \times 0 \times 0 = I_1 \times 0 \times 0 \cup I_2 \times 0 \times 0.$$

现在考虑

$$P_\lambda = I_1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda} \subset R_\lambda,$$

易见，P_λ 可视为指标为 λ 的普通柄，通过 φ 在 P_λ 上的限制将其沿着 $I_1\times\partial D^\lambda\times D^{n-\lambda}$ 粘附于 ∂M_1^{n+1}. 再令

$$P_{\lambda+1} = R_\lambda - I_1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda} = I_2 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda}.$$

易见，$P_{\lambda+1}$ 是一个指标为 $\lambda+1$ 的普通柄，并且由粘合映射 φ 沿着 $[\partial I_2\times D^\lambda\cup I_2\times\partial D^\lambda]\times D^{n-\lambda}$ 将其粘附于 $M_1^{n+1}+P_\lambda$.

由此证得断言 1.

断言 2　如果圆 Morse 函数 $f:(M^{n+1},\partial_- M^{n+1},\partial_+ M^{n+1})\to[0,1]$ 有一指标为 λ 的临界圆 C，并且 f 在 C 的邻域内有一扭转坐标表示，那么 M^{n+1} 上存在一个圆 Morse 函数 f' 具有 2 个临界圆，其指标分别为 λ 和 $\lambda+1$ 或 $\lambda-1$ 和 λ，使得 f' 在这 2 个圆的附近仅有平凡坐标表示.

断言 2 的证明　考虑在 C 处的扭转坐标

$$\psi: [0,1] \times D^n(\varepsilon)/\sim \to \mathrm{Int}\, M^{n+1},$$

于是有

$$f\psi(t,x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

其中，$(t,x)\in[0,1]\times D^n(\varepsilon)/\sim$.

设 $f(C)=a$，取 $\delta(\delta>0)$满足 $0<a-\delta<a<a+\delta<1$，从而

$$f^{-1}[0,a] = \partial_- M^{n+1} \times [0,1].$$

再取 $0<\delta'<\delta$，并定义集合

$$A=\{x\in D^n(\varepsilon)\mid -x_1^2-\cdots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_n^2\geqslant -\delta,$$
$$x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_n^2\leqslant\delta'\},$$

显然，A 微分同胚于 $D^\lambda\times D^{n-\lambda}$. 当 A 环绕临界圆 C 一周时，其轨迹是一个流形 T_λ，使得 $f^{-1}[0,a+\delta]$微分同胚于 $f^{-1}[0,a-\delta]+T_\lambda$，即

$$f^{-1}[0,a+\delta]\cong f^{-1}[0,a-\delta]$$
$$+([0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim').$$

其中，$[0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim'$由$[0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}$根据下面的等价关系$\sim'$得到：

$$(0,x_1,\cdots,x_\lambda,y_1,\cdots,y_{n-\lambda})\sim'(1,-x_1,\cdots,-x_\lambda,y_1,\cdots,y_{n-\lambda}).$$

表达式中的符号"＋"表示通过一微分嵌入将$[0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim'$沿着$[0,1]\times\partial D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim'$粘附于 $f^{-1}[a-\delta]$.

易见，T_λ 是以 S^1 为底空间、以 $D^\lambda\times D^{n-\lambda}$为纤维的非平凡丛，从而有

$$H_i(f^{-1}[0,a+\delta],f^{-1}[0,a-\delta],Z)=\begin{cases}Z_2, & i=\lambda;\\ 0, & i\neq\lambda.\end{cases}$$

下面证明此式. 由代数拓扑的切割定理，有

$$\begin{aligned}&H_i(f^{-1}[0,a+\delta],f^{-1}[0,a-\delta],Z)\\&=H_i(f^{-1}[0,a-\delta]+T_\lambda,f^{-1}[0,a-\delta],Z)\\&=H_i([0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim',\\&\qquad[0,1]\times\partial D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim',Z).\end{aligned}$$

而$[0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim'$到$[0,1]\times D^\lambda\times 0/\sim'$的收缩形变给出

下式：

$$H_i([0,1]\times D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim',[0,1]\times\partial D^\lambda\times D^{n-\lambda}/\sim',Z)$$
$$=H_i([0,1]\times D^\lambda/\sim',[0,1]\times\partial D^\lambda/\sim',Z).$$

于是，由正合同调序列理论推出欲证结论.

进一步，由于假定 M^{n+1} 与 ∂M^{n+1} 都是单连通的，那么根据 Smale 的一个定理知，在集合 $f^{-1}[0,1]-f^{-1}[0,a-\delta]$ 上存在一个普通 Morse 函数 $\tilde{f}$，$\tilde{f}$ 有一个指标为 λ 的临界点和一个指标为 $\lambda+1$ 的临界点，于是该 Morse 函数 $\tilde{f}$ 给出一个普通环柄分解. 由 Asimov 引理知，我们可以用指标为 λ 与指标为 $\lambda+1$（或指标分别为 $\lambda-1$ 与 λ）的圆柄替换这些普通环柄. 现在应用 Miyoshi 的一个引理[39]，可构造 M^{n+1} 上的一个圆 Morse 函数，使得该函数有两个新的临界圆（取代原来的临界圆 C）有平凡局部坐标表示，从而完成定理的证明.

5.2　圆 Morse 函数不等式

现在我们引入下面一些概念和符号.

首先引入下列记号：

$$\rho(N)=\frac{1}{2}(N+|N|),\quad N\in Z,$$

$$\chi_\lambda(M^{n+1})=\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda+i}\mathrm{rank}\ H_i(M^{n+1},Q),$$

$$\kappa_\lambda(M^{n+1})=\mu(\mathrm{Tors}\ H_\lambda(M^{n+1},Z)+\chi_\lambda(M^{n+1})).$$

这里，M^{n+1} 是一个闭流形，μ 是最小生成元个数.

定义 5.6　我们称维数 λ 关于 M^{n+1} 是奇异的，如果对于 λ 有

$$\chi_{\lambda-1}(M^{n+1})=\kappa_{\lambda-1}(M^{n+1})=\kappa_{\lambda+1}(M^{n+1})=0,$$

并且

$$\kappa_\lambda(M^{n+1}) = \kappa > 0,$$

$$H_\lambda(M^{n+1}, Z) \neq Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_2.$$

现在回忆一下最小恰当圆 Morse 函数的概念. 考虑 M^{n+1}上那些具有最小指标为 λ 的临界圆个数的圆 Morse 函数构成的集合 $F_\lambda(M^{n+1})$,则任一函数 $f \in \bigcap_{\lambda=0}^{n} F_\lambda(M^{n+1})$称为最小恰当圆 Morse 函数. 关于最小恰当圆 Morse 函数,有如下定理:

定理 5.4 设 $M^{n+1}(n \geqslant 5)$是一个单连通无边流形,那么 M^{n+1}上存在一个最小恰当圆 Morse 函数的充要条件是 M^{n+1}没有奇异维数. 此外,M^{n+1}上最小恰当圆 Morse 函数的指标为 λ 的临界圆个数 N_λ 满足

$$N_\lambda = \rho(\kappa_\lambda(M^{n+1})).$$

一般地,类似经典 Morse 不等式,有如下结果:

定理 5.5 假定光滑流形 $M^{n+1}(n \geqslant 1)$上存在一个圆 Morse 函数 f,令 C_λ 是 f 的指标为 λ 的临界圆的个数,那么有不等式

$$C_\lambda \geqslant \rho(\kappa_\lambda(M^{n+1})).$$

5.3 (S)类流形与可积 Hamilton 系统能量面

为了下面讨论方便,让我们回顾一下有关概念.

设 M 是一个可定向的紧致 3 维流形,若边界 ∂M 非空,则 ∂M 是由若干环面 T^2 组成的. 假定每个边界环面依其(同 M 相容的)定向标以一号或十号,以 $\partial_- M$ 表示负环面组成的边界集,以$\partial_+ M$ 表示正环面组成的边界集,那么两个流形偶$(M_1, \partial_- M_1)$和$(M_2, \partial_- M_2)$的连通和定义为

$$(M_1, \partial_- M_1) \# (M_2, \partial_- M_2) = (M_1 \# M_2, \partial_- M_1 \cup \partial_- M_2).$$

为方便起见,称这种边界为环面的流形偶为环流形偶.

定义 5.7 设 M_i 是一个可定向的紧致 3 维(有边)流形,若光

滑函数 $f:M\to R$ 满足条件：

(1) f 的临界点集由 Int M 中的非退化临界圆组成；

(2) 对于每一个 f 的正则值 c，若 $f^{-1}(c)$ 非空，则 $f^{-1}(c)$ 的任一个连通分支都微分同胚于环面 T^2，

那么称 f 是一个 S-函数，而 M 称为一个 S-流形，即 $M\in(S)$.

例 5.1 令 $M(a)=\{x\in M\mid f(x)\leqslant a\}$，设 $\partial_- M$ 表示使梯度场 grad f 指向 M 内部的边界点集合，则 $(M,\partial_- M)$ 是一个流形偶，$(M(a),\partial_- M)$ 也是一个流形偶.

定义 5.8 基块偶 $(B_1,\partial_- B_1)$，$(B_2,\partial_- B_2)$，$(B_3,\partial_- B_3)$，$(B_4,\partial_- B_4)$ 定义为

$$(B_1,\partial_- B_1)=(D^2\times S^1,\varnothing),$$
$$(B_2,\partial_- B_2)=(D^2\times S^1,\partial D^2\times S^1),$$
$$(B_3,\partial_- B_3)=(N^2\times S^1,\partial_- N^2\times S^1),$$
$$(B_4,\partial_- B_4)=(N^2\times S^1,\partial_+ N^2\times S^1),$$

其中，N^2 表示一个含有 2 个洞的圆盘，$\partial_- N^2$ 选定为 ∂N^2 的一个连通分支，$\partial_+ N^2$ 定义为其余的 2 个连通分支.

定义 5.9 考虑环流形偶 $(M_1,\partial_- M_1)$ 和 $(M_2,\partial_- M_2)$，设 $A_1\subset\partial_- M_1$，$A_2\subset\partial_- M_2$. 令 $\varphi:A_1\to A_2$ 是一个反向微分同胚，则环流形偶

$$(M_1\cup_\varphi M_2,(\partial_- M_1-A_1)\cup\partial_- M_2)$$

是由 φ 导出的 $(M_1,\partial_- M_1)$ 与 $(M_2,\partial_- M_2)$ 的单调粘合.

定理 5.6 环流形偶 $(M,\partial_- M)$ 上存在一个 S-函数，当且仅当 $(M,\partial_- M)$ 由基块偶通过单调粘合得到.

由此推出下面的主要结论：

定理 5.7 (H) 类与 (S) 类相同.

证明 由第 3 章知，每一个 3 维流形 $M\in(H)$，当且仅当 M 都可以用 3 种类型的若干基块沿边界粘合而成. 其中，类型 1 是 $B_1\cong B_2\cong D^2\times S^1$，类型 2 是 $T^2\times[0,1]$，而类型 3 是 $B_3\cong B_4\cong$

$D^2\times S^1$. 特别地,M 可由这些基块单调粘合得到,故由定理 5.6,M 上有 S-函数,从而 $M\in(S)$. 反之显然.

第 6 章　奇异丛理论

这一章中我们将建立奇异丛的一点基本理论. 奇异丛的概念是由 Smale 在其著名论文《拓扑与力学》[42,43]中提出的,其基本思想可追溯到 20 世纪 20 年代,当时 Birkhoff 和 Hotelling 等人[26,27]曾利用这种思想对 Hamilton 能量面的拓扑做过一些讨论. 最近,A. V. Bolsinov 等人又利用这种思想对 2 个自由度的 Hamilton 系统能量面做了详细的研究. 需要强调的是,奇异丛并不是通常的纤维丛,而是一类流形.

6.1　基本概念

现在让我们回顾一下有关的基本概念

设 M 是一 n 维(有边或无边)光滑流形,E 是以 M 为底空间的向量丛. 令 E_0 是与之相应的胞腔丛,E_1 是相应的球面丛,通过 E_0,我们可得 Smale 的奇异丛[43].

定义 6.1　设 E_0 为上述单位胞腔丛,若底空间 M 的边界 ∂M 非空,则 E_0 在 ∂M 上每一点的纤维都压缩成一点,如此得到的拓扑空间 $\alpha(E)$称为奇异丛. 具体一些,我们称之为胞腔奇异丛.

受 A. V. Bolsinov 等人工作[14]的启发,我们给出球面奇异丛的概念.

定义 6.2　设 E_1 是上述以 M 为底空间的单位球丛,若 ∂M 非空,则将 ∂M 上每一点的纤维等同为一点,如此所得的拓扑空间 $\beta(E)$称为球面奇异丛.

易见,给定一向量丛,$\alpha(E)$和 $\beta(E)$都是拓扑流形(实际上,根

据 Smale 的工作[43]，它们都是微分流形)，并且有如下关系：

命题 6.1 奇异丛 $\alpha(E)$ 和 $\beta(E)$ 满足等式

$$\partial(\alpha(E)) = \beta(E),$$

即 $\alpha(E)$ 的边界是 $\beta(E)$.

奇异丛的理论主要是研究 $\beta(E)$ 的拓扑结构与底流形 M 的拓扑之间的关系.

下面考察一些例子.

例 6.1 考虑单位区间的平凡丛 $E=[0,1]\times R^n$，则相应的胞腔奇异丛 $\alpha(E)$ 是 $n+1$ 维胞腔 D^{n+1}，相应的球面奇异丛 $\beta(E)$ 是球面 S^n.

例 6.2 设 M 为无边流形，$E=M\times R^n$ 为平凡向量丛，则有

$$\alpha(E) = M \times D^n,$$

$$\beta(E) = M \times S^{n-1}.$$

例 6.3 设 M 为有边流形，$E=M\times R^1$ 为以 M 为底空间的平凡丛，则 $\beta(E)$ 是 M 的一个复制 M' 与 M 沿 ∂M 等同而得到的无边流形.

例 6.4 设 M 是一圆环面 $S^1\times[0,1]$，TM 是其切丛，则其球面奇异丛为

$$\beta(TM) = S^2 \times S^1.$$

例 6.4 的结论可借助 Heagard 分割技巧[14]证明，也可按照第 7 章的方式证明，详细讨论见后面部分.

例 6.5 设 M 为一 Riemann 流形，TM 为其切丛，命 K 为 M 上的一个 Riemann 度量，$V:M\to R$ 是 M 上一势函数. 取 V 的一正则值 c，使得 $V^{-1}(c)$ 非空，则 $M_c=\{x\in M\,|\,V(x)\leqslant c\}$ 是一有边流形. 命 T_c 为 TM 在 M_c 上的限制，则自然 Hamilton 能量面

$$E_c = \left\{(x,v) \in (TM) \,\middle|\, \frac{1}{2}K(v,v) + V(x) = c\right\}$$

就是球面奇异丛 $\beta(T_c)$.

例 6.5 说明了奇异丛的物理意义，由此可见，球面奇异丛正好刻画了 Hamilton 系统能量面.

6.2 奇异丛的等价描述

胞腔奇异丛和球面奇异丛还可以从另一种角度描述，下面的命题给出了奇异丛的等价刻画.

命题 6.2(Smale) 令 E 是 M 上具有 Riemann 度量的向量空间丛，$\partial M=\varnothing$. 设 $f:M\to R$ 为一光滑函数，c 为其正则值. 命 $g:E\to R$ 为由 $g(v,x)=\frac{1}{2}\|v\|^2+f(x)$ 所定义的函数，此处 $v\in E_x$，E_x 为 x 上的纤维. 那么 c 也是 g 的正则值，从而 $g^{-1}(-\infty,c]$ 是一有边微分流形. 此外，如果 E 和 E' 是 M 上两个维数相同的向量丛，c 为两个函数 f_0,f_1 的正则值，且 $f^{-1}(-\infty,c]=f_1^{-1}(-\infty,c]$，以及 E,E' 作为 $M_c=\{x\in M\mid f(x)\leqslant c\}$ 上的丛是同构的(不一定保持度量不变)，那么 $g^{-1}(-\infty,c]$ 与 $g_1^{-1}(-\infty,c]$ 微分同胚.

设 E_c 为 E 在 M_c 上的限制，则 $g^{-1}(-\infty,c]$ 给出了 $\alpha(E_c)$ 的另一种刻画，而 $\beta(E_c)$ 可由 $g^{-1}(c)$ 来表示. 这可由如下事实看出，对每一 $x\in M_c-\partial M_c=f^{-1}(-\infty,c)$，由等式

$$g(v,x)=\frac{1}{2}\|v\|^2+f(x)=c,\quad v\in E_x$$

知

$$\|v\|^2=2(c-f(x))=c_x>0,\quad \forall\, x\in M_c-\partial M_c.$$

从而，对 M_c 中任一内点 x，都决定一 E_x 中的纤维 $\|v\|^2=c_x$ $(v\in E_x)$ 微分同胚于 S^{k-1}，k 是纤维 E_x 的维数. 而在 $x\in\partial M_c=f^{-1}(c)$ 上，$\|v\|=0$，即纤维是一点.

6.3 平凡球面奇异丛的几何刻画

在这一节中，我们将说明平凡球面奇异丛具有简单的几何结构，它们可作为相应的积流形的边界而得到.

定理 6.1 设 $E=M\times R^n$ 是一平凡向量丛，$\beta(E)$是 E 中的平凡球面奇异丛，那么有

$$\beta(E)\cong\partial(M\times D^n)=\partial M\times D^n\cup M\times S^{n-1}.$$

证明 首先注意如下事实：

$$\begin{aligned}\partial(M\times D^n)&=\partial M\times D^n\cup M\times D^n\\&=\partial M\times D^n\cup M\times S^{n-1},\end{aligned}$$

以及

$$\partial M\times D^n\cap M\times\partial D^n=\partial M\times S^{n-1}.$$

易证，存在 $\partial M\times D^n$ 的一个邻域，即存在一个嵌入

$$f:\partial M\times D^n(1+\varepsilon)\to M\times D^n,$$

使得

$$\begin{aligned}&\partial M\times D^n\subset f(\partial M\times D^n(1+\varepsilon)),\\&\partial M\times D^n=f(\partial M\times D^n(1)),\end{aligned}$$

这里，$D^n(1+\varepsilon)$是半径为 $1+\varepsilon$ 的开胞腔.

实际上，根据领边定理[28]，对于 $\partial M\times\partial D^n$，有一个双边(bicollar)：

$$F:\partial M\times\partial D^n\times(-\varepsilon,\varepsilon)=\partial M\times S^{n-1}\times(\varepsilon,\varepsilon)\to M\times D^n,$$

使得

$$F(\partial M\times S^{n-1}\times\{0\})=\partial M\times\partial D^n,$$

并且满足

$$F(\partial M\times S^{n-1}\times(-\varepsilon,0))\subset\partial M\times D^n,$$

因此 $F(\partial M\times\partial D^n\times(-\varepsilon,\varepsilon))\cup\partial M\times D^n$ 是 $\partial M\times D^n$ 的一个邻域.

另一方面，显然有

$$F(\partial M\times\partial D^n\times(-\varepsilon,\varepsilon))\cup D^n\cong\partial M\times\partial D^n(1+\varepsilon),$$

故存在 $\partial M\times\partial D^n$ 的一个邻域

$$f:\partial M\times D^n(1+\varepsilon)\to M\times D^n,$$

使得

$$f(\partial M\times D^n)=\partial M\times D^n(1).$$

现在定义一个等价关系～:每个集合 $\{x\}\times D^n\subset\partial M\times D$ 等同为一点,于是 $f(\partial M\times D^n)\times D^n(1+\varepsilon)/\sim\subset\partial\beta(E)$ 是 $\partial M\times\{0\}\subset\partial\beta(E)$ 的一个邻域. 因为

$$D^n(1+\varepsilon)/\sim\cong D(\varepsilon),$$

所以

$$F(\partial M\times D^n(1+\varepsilon))\cong f(\partial M\times D^n(1+\varepsilon))/\sim.$$

但

$$\begin{aligned}\partial(M\times D^n)&-f(\partial M\times D^n(1+\varepsilon))\\&\cong\partial\beta(E)-f(\partial M\times D^n(1+\varepsilon))/\sim,\end{aligned}$$

所以

$$\beta(E)=\partial\alpha(E)\cong\partial(M\times D^n).$$

证毕.

上述定理使得在许多情况下 $\beta(E)$ 的几何结构的讨论变得较为容易,我们用有关例子说明这一点.

例 6.6 设 $E=A\times R^2=S^1\times[0,1]\times R^2$,则人们[14]利用3维流形理论的 Heegard 分割原理可证明 $\beta(E)=S^2\times S^1$. 而运用定理6.1,得

$$\begin{aligned}\beta(E)&\cong\partial(A\times D^2)=\partial(S^1\times[0,1]\times D^2)\\&\cong\partial(S^1\times D^2)=S^1\times S^2.\end{aligned}$$

例 6.7 设 $E=D^2\times R^2$,同样,运用定理6.1直接可得

$$\beta(E)\cong\partial(D^2\times D^2)\cong\partial D^4=S^3.$$

6.4 平凡球面奇异丛的同调群

由于平凡的球面奇异丛有着良好的物理背景和基本的数学意义，在这一节里我们将对此进行详细讨论.

设 M 是 m 维带边光滑流形，E 是以 M 为底空间的平凡向量丛，即 $E=M\times R^n$. 关于其球面奇异丛 $\beta(E)$，我们有如下如果：

定理 6.2 奇异丛 $\beta(E)$ 的同调群满足下列正合序列：

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} H_k(S^{n-1}\times \partial M) \xrightarrow{g_*} H_k(S^{n-1}\times M)\oplus H_m(\partial M)$$

$$\xrightarrow{h_*} H_k(\beta(E)) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^{n-1}\times \partial M)\to \cdots. \tag{6.1}$$

证明 注意到 $\beta(E)$ 是 $M\times S^{n-1}$ 沿 M 的边界将其上的纤维压缩到一点而成的，我们可以构造 $\beta(E)$ 的一个覆盖 $\{U,V\}$ 如下：

由领边定理(Collar theorem)[28]知道，存在一个嵌入

$$f:\partial M\times[0,1)\to M,$$

使得 $f(x,0)=x$.

定义 M_1,M_2 和 M_3 分别如下：

$$M_1=f(\partial M\times[0,\frac{3}{4})),$$

$$M_2=f(\partial M\times[0,\frac{1}{2})),$$

$$M_3=M-M_2,$$

那么 $\{M_2,M_3\}$ 构成 M 的一个覆盖. 易见

$$M_3\cap M_1=f(\partial M\times[\frac{1}{2},\frac{3}{4}))$$

$$\cong \partial M\times[0,1).$$

取

$$U=M_3\widetilde{\times}S^{n-1},$$

$$V=M_1\widetilde{\times}S^{n-1},$$

其中，$M_1\widetilde{\times}S^{n-1}$表示$M_1\widetilde{\times}S^{n-1}$作为$M_1$上的纤维丛将每一点$x\in\partial M$上的纤维都等同为一点后而得到的流形，易见$\{U,V\}$是$\beta(E)$的一个覆盖，且满足

$$U\cong M\times S^{n-1},$$
$$U\cap V\cong\partial M\times(0,1)\times S^{n-1},$$
$$V\cong\partial M\times D^n,$$

这里，D^n是n维胞腔．利用熟知的Mayer-Vietoris序列

$$\cdots\xrightarrow{\Delta}H_k(U\cap V)\xrightarrow{g_*}H_k(U)\oplus H_k(V)$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(\beta(E))\xrightarrow{\Delta}H_{k-1}(U\cap V)\to\cdots,$$

便可得如下正合序列

$$\cdots\xrightarrow{\Delta}H_k(\partial M\times S^{n-1})\xrightarrow{g_*}H_k(M\times S^{n-1})\oplus H_k(\partial M)$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(\beta(E))\xrightarrow{\Delta}H_{k-1}(\partial M\times S^{n-1})\to\cdots.$$

证毕．

推论6.1　(1) 当$k<n-1$时，序列(6.1)变为

$$\cdots\xrightarrow{\Delta}H_k(\partial M)\xrightarrow{g_*}H_k(M)\oplus H_k(\partial M)$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(\beta(E))\xrightarrow{\Delta}H_{k-1}(\partial M)\xrightarrow{g_*}\cdots;\tag{6.2}$$

(2) 当$k=n-1$时，序列(6.1)变为

$$\cdots\xrightarrow{\Delta}H_{n-1}(\partial M)\oplus H_0(\partial M)\xrightarrow{g_*}H_{n-1}(M)\oplus H_{n-1}(\partial M)$$
$$\xrightarrow{h_*}H_{n-1}(\beta(E_1))\xrightarrow{\Delta}H_{n-2}(\partial M)\to\cdots;\tag{6.3}$$

(3) 当$k>n-1$时，序列(6.1)变为

$$\cdots\xrightarrow{\Delta}H_k(\partial M)\oplus H_{k-n+1}(\partial M)$$
$$\xrightarrow{g_*}H_k(M)\oplus H_{k-n+1}(M)\oplus H_k(\partial M)$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(\beta(E))\xrightarrow{\Delta}\cdots.\tag{6.4}$$

证明　首先回顾一下著名的整系数同调群Künneth公式

$$H_n(X\times Y)\approx\bigoplus_{p=0}^{n}H_p(x)\otimes H_{n-p}(Y)$$
$$\oplus\bigoplus_{p=0}^{n}\mathrm{Tor}(H_p(x),H_{n-p-1}(Y)),$$

其中,X,Y 是拓扑空间.

注意到同调代数的如下基本事实:(i) 若 A 是自由阿贝尔群,则 $\mathrm{Tor}(B,A)=0$ 对任一阿贝尔群 B 都成立;(ii) 对任一阿贝尔群 A 及整数群 Z,其张量积 $A\otimes Z\approx A$. 由 Künneth 公式知(注意,S^{n-1}的同调群是自由阿贝尔群),当 $k<n-1$ 时,有

$$H_k(\partial M\times S^{n-1})\approx\bigoplus_{p=0}^{k}H_p(\partial M)\otimes H_{n-p}(S^{n-1})$$
$$\oplus\bigoplus_{p=0}^{n}\mathrm{Tor}(H_p(\partial M),H_{n-p-1}(S^{n-1}))$$
$$=H_k(\partial M)\otimes Z$$
$$=H_k(\partial M),$$

以及

$$H_k(M\times S^{n-1})=H_k(M),$$

于是利用序列(6.1)便推得(1)中的(6.2)式.

当 $k>n-1$ 时,根据 Künneth 公式,有

$$H_k(\partial M\times S^{n-1})\approx\bigoplus_{p=0}^{k}H_p(\partial M)\otimes H_{n-p}(S^{n-1})$$
$$=H_k(\partial M)\otimes Z\oplus H_{k-n+1}(\partial M)\otimes Z$$
$$=H_k(\partial M)\oplus H_{k-n+1}(\partial M),$$

以及

$$H_k(M\times S^{n-1})\approx H_k(M)\oplus H_{k-n+1}(M),$$

代入序列(6.1),便得(3)中的(6.4)式.

同理可证(2)中的(6.3)式. 证毕.

作为应用,现在我们将利用定理 6.2 具体计算 $\beta(E)$的同调群,其中,$E=M\times R^2$,$M\cong S^1\times[0,1]$. 由定理 6.2 知有正合序列

$$\cdots\xrightarrow{g}H_3(M\times S^1)\oplus H_3(\partial M)\xrightarrow{h}H_3(\beta(E))$$

$$\xrightarrow{\triangle} H_2(\partial M\times S^1)\xrightarrow{g_*} H_2(M\times S^1)\oplus H_2(\partial M)$$
$$\xrightarrow{h_*}\cdots. \tag{6.5}$$

注意到 ∂M 是两个不相交的圆 S_1^1 与 S_2^1 之并，我们有

$$H_2(\partial M\times S^1)=H_2((S_1^1\cup S_2^1)\times S^1)$$
$$\approx Z\oplus Z,$$
$$H_2(M\times S^1)\oplus H_2(\partial M)=H_2(S^1\times[0,1]\times S^1)$$
$$\oplus H_2(S_1^1\cup S_2^1)$$
$$\approx Z\oplus 0=Z,$$
$$H_3(M\times S^1)=H_2(S^1\times[0,1]\times S^1)$$
$$=H_3(\partial M)=0.$$

于是由序列(6.5)，有

$$0\xrightarrow{h_*}H_3(\beta(E))\xrightarrow{\triangle}Z\oplus Z\xrightarrow{g_*}Z\xrightarrow{h_*}\cdots. \tag{6.6}$$

另一方面，闭链 $S_1^1\times S^1$ 与 $S_2^1\times S^1$ 是 $H_2(\partial M\times S^1)$的两个生成元，且在 $M\times S^1$ 中是同调的，此外它们也是 $H_2(M\times S^1)$的生成元，所以有

$$\text{Image } g_*=Z,$$

从而

$$\text{Kernal } g_*=Z.$$

由序列(6.6)知△是单射，故由正合性知

$$H_3(\beta(E))\cong Z.$$

为计算 $H_2(\beta(E))$，考虑

$$\cdots\xrightarrow{g_*}H_2(M\times S^1)\oplus H_2(M)\xrightarrow{h_*}H_2(\beta(E))$$
$$\xrightarrow{\triangle}H_1(\partial M\times S^1)\xrightarrow{g_*}H_1(M\times S^1)\oplus H_1(\partial M)$$
$$\rightarrow\cdots. \tag{6.7}$$

由上述关于 $H_3(\beta(E))$ 的讨论知，序列(6.6)中的映射

$$g_*:\ H_2(\partial M\times S^1)\rightarrow H_2(M\times S^1)\oplus H_2(\partial M)$$

是满射，故序列(6.7)中的 h_* 满足 Image $h_*=0$，从而序列(6.7)中的$\triangle$是单射.

另一方面，易见 $H_1(\partial M\times S^1)$的生成元可取为 $a_1=S_1^1\times\{x\}$，$a_2=S_2^1\times\{x\}$，$a_3=\{y_1\}\times S^1$，$a_4=\{y_2\}\times S^1$，其中，$x\in S^1$，$y_1\in S_1^1$，$y_2\in S_2^1$.

设 $a\in H_1(\partial M\times S^1)$，那么 a 是 $\partial M\times S^1$ 中的 1 维同调类，则由 g_* 的定义得

$$g_*(a)=(\bar{a},-\hat{a}),$$

其中，$\bar{a}$表示 a 在 $M\times S^1$ 中的 1 维同调类，$\hat{a}$表示 a 在 ∂M 中的同调类.

易证，$g_*(a)=0$ 当且仅当

$$a=k(a_3-a_4),\quad k\in Z,$$

故

$$\text{Kernal } g_*\cong Z.$$

由于$\triangle$是单射，由正合性知

$$H_2(\beta(E))\cong Z.$$

此外，利用 Künneth 公式于序列(6.7)，得

$$\cdots\xrightarrow{h_*}H_2(\beta(E))\xrightarrow{\triangle}Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z$$

$$\xrightarrow{g_*}Z\oplus Z\oplus Z\oplus Z\xrightarrow{h_*}H_1(\beta(E))\xrightarrow{\triangle}\cdots. \tag{6.8}$$

由前面的讨论可证 Kernal $g_*\cong Z$，从而序列(6.8)中的后一个 h_* 满足

$$\text{Image } h_*\approx Z.$$

另一方面，由(6.1)式得

$$\cdots\xrightarrow{h_*}H_1(\beta(E))\xrightarrow{\triangle}H_0(\partial M\times S^1)$$

$$\xrightarrow{g_*}H_0(M\times S^1)\oplus H_0(\partial M)\to\cdots.$$

由 g_* 的定义知 g_* 是同构，故

$$\text{Image } \triangle = 0,$$

从而有

$$H_1(\beta(E)) = \text{Image } h_* \approx Z.$$

注 利用 Heegard 分割技巧可证(见 A. V. Bolsinov 的文章[14])$\beta(E)\approx S^1\times S^2$,于是我们给出了 $S^1\times S^2$ 的同调群的又一种计算方法,由此也可直接利用 Künneth 公式计算 $\beta(E)$ 的同调群.

6.5 平凡丛的球面奇异丛的基本群

这一节我们将讨论奇异丛 $\beta(E)$的基本群同底流形 M 及其边界 ∂M 的基本群的关系. 具体地,我们有

定理 6.3 奇异丛 $\beta(E)$的基本群同构于

$$\{\pi_1(\partial M) * [\pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(M)] \\ | j_*(z) = k_*(z), \quad \forall z \in \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\partial M)\},$$

这里

$$j: U \cap V \to U,$$
$$k: U \cap V \to V$$

是包含映射,其中,$\{U,V\}$是定理 6.2 的证明中给出的 $\beta(E)$的覆盖,而

$$\pi_1(\partial M) * [\pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(M)]$$

是 $\pi_1(\partial M)$与 $\pi_1(S^{n-1})\times\pi_1(M)$的自由积.

证明 考虑定理 6.2 的证明中所构造的关于 $\beta(E)$的覆盖$\{U,V\}$,利用基本群的 Van Kampen 定理[6],可得

$$\begin{aligned}\pi_1(\beta(E)) &= \pi_1(U \cup V) \\ &\approx \{\pi_1(U) * \pi_1(V) \\ &\qquad | j_*(z) = k_*(z), \quad \forall z \in \pi_1(U \cap V)\}.\end{aligned}$$

注意到

$$U \cong M \times S^{n-1},$$
$$V \cong \partial M \times D^n,$$
$$U \cap V \approx \partial M \times (0,1) \times S^{n-1},$$

我们有

$$\pi_1(U) = \pi_1(M) \times \pi_1(S^{n-1}),$$
$$\pi_1(\partial M \times D^n) = \pi_1(\partial M),$$

以及

$$\pi_1(U \cap V) = \pi_1(\partial M) \times \pi_1(S^{n-1}),$$

由此便完成了定理的证明.

注 上面的定理 6.3 可以换一个方式证明. 注意到

$$\begin{aligned} M \widetilde{\times} S^{n-1} &= \partial(M \widetilde{\times} D^{n-1}) \\ &\cong \partial(M \times D^n) \\ &= M \times S^{n-1} \cup \partial M \times D^n, \end{aligned}$$

以及

$$M \times S^{n-1} \cap \partial M \times D^n = \partial M \times S^{n-1},$$

则由 Van Kampen 定理推得

$$\begin{aligned} \pi_1(M \widetilde{\times} S^{n-1}) &\approx \pi_1(\partial(M \times D^n)) \\ &\approx \{\pi_1(M \times S^{n-1}) * \pi_1(\partial M \times D^n) \\ &\quad | j_*(z) = k_*(z), \quad \forall z \in \pi_1(\partial M \times S^{n-1})\}, \end{aligned}$$

其中, $j: \partial M \times S^{n-1} \to M \times S^{n-1}$ 与 $k: \partial M \times S^{n-1} \to \partial M \times D^n$ 都是包含映射, 而 j_* 与 k_* 是它们诱导出的同态.

因为 ∂M 是 $\partial M \times D^n$ 的收缩核, 故上面的关系式变成

$$\begin{aligned} \pi_1(M \widetilde{\times} S^{n-1}) \approx \{&\pi_1(\partial M) * \pi_1(M \times S^{n-1}) \\ &| j_*(z) = k_*(z), \quad \forall z \in \pi_1(\partial M \times S^{n-1})\}. \end{aligned}$$

推论 6.2 若平凡丛 E 的纤维维数大于 2, 则

$$\pi_1(\beta(E)) \cong \{\pi_1(\partial M) * \pi_1(M)$$

$$|j_*(z) = k_*(z), \quad \forall z \in \pi_1(\partial M)\}.$$

推论 6.3　如果平凡丛 E 的底空间 M 是单连通的，且纤维维数大于 2，那么 $\beta(E)$ 也是单连通的.

证明　在给定的条件下 U 是单连通的，因此

$$j_*(z) = e, \quad \forall z \in \pi_1(\partial M).$$

由定理 6.3 得

$$\pi_1(\beta(E)) \cong \{\pi_1(\partial M) | k_*(z) = e, \quad \forall z \in \pi_1(\partial M)\}$$
$$= e.$$

故得所证.

推论 6.4　如果 ∂M 是单连通的，且纤维维数大于 2，则

$$\pi_1(\beta(E)) \cong \pi_1(M).$$

6.6　一般向量丛的球面奇异丛的拓扑

对于一般情形，目前尚未得到很好的结果. 下面的结果仅指出一般向量丛的奇异丛同平凡向量丛的奇异丛的联系，更深入的结果有待于进一步的努力.

定理 6.4　设 M 是光滑(有边)流形，E 是 M 上的一个 n 向量空间丛，则存在一平凡向量丛 $\varepsilon^{n+m} = M \times R^{n+m}$，以及一个自然的映射

$$T: \beta(E) \to \beta(\varepsilon^{n+m}),$$

使得 T 是球面奇异丛 $\beta(E)$ 到球面奇异丛 $\beta(\varepsilon^{n+m})$ 中的一个嵌入，其中，T 由 Whitney 和所诱导.

为证明此定理，首先回顾一下向量丛理论中一个熟知的结果[36]：

引理 6.1　设 ζ 是光滑流形 M 上的一个实 n 向量空间丛，那么存在一个 $m>0$，以及 M 上的一个向量空间丛 η，使得 Whitney 和 $\zeta \oplus \eta$ 同构于 M 上的平凡丛 $\varepsilon^{n+m} = M \times R^{n+m}$.

定理 6.4 的证明 由引理 6.1 知，存在 M 上的一个向量空间丛 η，使得 $E\oplus\eta$ 同构于 ε^{n+m}. 由向量丛的 Riemann 度量存在定理知，ε^{n+m} 上有一 Riemann 度量 $\langle,\rangle$. 设 $\langle,\rangle'$ 是 $E\oplus\eta$ 上由同构及 $\langle,\rangle$ 诱导的 Riemann 度量. 借此度量可取 $E'\subset E$，其中 E' 是由 E 通过 $\langle,\rangle'$ 而得的 $n-1$ 单位球面丛. 又设 $M\times S^{n+m-1}$ 是 ε^{n+m} 中由度量 $\langle,\rangle$ 确定的单位球面丛. 由 $E\oplus\eta$ 到 ε^{n+m} 的同构可导出一个 E' 到 $M\times S^{n+m-1}$ 的一个自然的嵌入，通过各自压缩 ∂M 上的纤维 S^{n-1} 与 S^{n+m-1} 到一点，即可导出 $\beta(E)$ 到 $\beta(\varepsilon^{n+m})$ 的一个自然的嵌入.

第 7 章 自然 Hamilton 系统能量面的拓扑

本章主要讨论定义在辛空间 $TR^n=R^{2n}=R^n\times R^n$ 上的 Hamilton 系统能量面的拓扑. 我们首先讨论几个 Hamilton 系统的能量面的具体构造，然后对高维情形下一类 Hamilton 系统的能量面给出几何描述，并顺便指出一类拓扑流形作为代数集的实现方法，最后，我们给出关于 Hamilton 能量面的若干拓扑定理.

7.1 几个 Hamilton 系统能量面的几何构造

为讨论方便，我们先给出如下结果：

引理 7.1 设 $E=D^m\times R^n$，则 $\beta(E)\cong S^{m+n}$.

证明 易见 $\beta(E)=\partial\alpha(E)=\partial(D^m\times D^n)\cong S^{m+n}$.

Kepler 问题

此时，TR^2 上的自然 Hamilton 函数为

$$H(v,x)=\frac{v_1{}^2+v_2{}^2}{2}-\frac{1}{\|x\|},\quad (v,x)\in TR^2.$$

若 $c>0$，则 $E_c=H^{-1}(c)$ 中的点满足

$$\frac{v_1{}^2+v_2{}^2}{2}=c+\frac{1}{\|x\|},$$

易见可达区域

$$\begin{aligned}Q_c&=V^{-1}(-\infty,c]\\&=\left\{x\in R^2\left|-\frac{1}{\|x\|}<c\right.\right\}\end{aligned}$$

$$= R^2.$$

此外，除去原点外，R^2 中每一点上的纤维都是圆，故

$$E_c \cong (R^2 - \{0\}) \times S^1.$$

同理，若 $c=0$，则易见 $Q_c=R^2$，且在无穷远处纤维缩成一点，在 0 处的纤维是无穷大圆，故

$$E_c \cong (S^2 - \{p,q\}) \times S^1.$$

若 $c<0$，则

$$Q_c = \left\{x \in R^2 \middle| \|x\| \leqslant -\frac{1}{c}\right\}$$

是一闭圆盘. 由于奇异丛 $\beta(Q_c \times R^2) = \partial(\alpha(Q_c \times R^2)) \approx S^3$，而对 E_c 而言在 $0 \in Q_c$ 处的纤维为无穷大圆，故

$$E_c \cong S^3 - S^1.$$

中心力问题

考虑 $TR^2 = R^2 \times R^2$ 上的 Hamilton 函数

$$H(v,x) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + V(\|x\|), \quad (v,x) \in R^2 \times R^2.$$

为讨论方便，假定 V 是光滑单变量函数，此时只需讨论 3 种情况：

(1) 设 $c>0$，而 Q_c 是一闭圆盘，且仅当 $x \in \partial Q_c$ 时 $V(\|x\|) = c$，于是能量面 E_c 同胚于 $\beta(Q_c \times R^2)$. 由奇异丛的定义知，$\beta(Q_c \times R^2)$ 同胚于 S^3，从而

$$E_c \cong \beta(Q_c \times R^2) \cong S^3.$$

(2) 设 $c>0$，且 $Q_c \cong R^2 - D^2$，其中，D^2 是一个以原点为中心的开圆盘，并设当 $x \in Q_c - \partial Q_c$ 时 $V(\|x\|) < c$，于是 $\beta(Q_c \times R^2)$ 等价于 S^3 挖去无穷远点处的纤维 S^1，即

$$E_c = \beta(Q_c \times R^2) \cong S^3 - S^1.$$

(3) 设对于 $c>0$，Q_c 是一个圆环 $c_1 \leqslant \|x\| \leqslant c_2$，$V(c_1) = V(c_2) = c$，且设当 $x \in Q_c - \partial Q_c$ 时 $V(\|x\|) < c$，那么易见

$$\beta(Q_c \times R^2) \cong S^1 \times S^2,$$

从而

$$E_c \cong S^1 \times S^2.$$

其它情形可作类似的讨论.

散射问题

$TR^2 = R^2 \times R^2$ 上的 Hamilton 函数为

$$H(v,x) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + x_1x_2\exp(-\|x\|^2),$$

$$(v,x) \in R^2 \times R^2,$$

易见势函数 $V = x_1x_2\exp(-\|x\|^2)$的最大值为 e^{-2}.

当 $c > e^{-2}$时,$Q_c = R^2$,从而

$$E_c \cong S^2 \times R^2.$$

当 $c = e^{-2}$ 时, $Q_c = R^2 - \{(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}$,从而

$$E_c \cong S^2 \times R^2 - S^1 \cup S^1 \cup S^1 \cup S^1.$$

当 $0 < c < e^{-2}$时,$Q_c \cong R^2 - D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2 \cup D_4^2$,其中,$D_i^2, i=1,2,\cdots,4$ 是 R^2 中互不相交的开圆盘. 为进一步讨论能量面 E_c 的结构,我们先证明下述一般的命题:

引理 7.2 设 M 是闭圆盘 D^2 中挖去 k 个互不相交的小开圆盘后所得到的有边流形,E 是 M 上的平凡向量丛,则 E 的球面奇异丛由 k 个形如 $S^1 \times S^2$ 的流形的连通和组成,即

$$\alpha(E) \cong S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2 \# \cdots \# S^1 \times S^2.$$

证明 此引理可仿照 A. V. Bolsinov 等[14]利用 Heegard 分割的方法证明. 这里我们直接利用 $\alpha(E)$的定义进行初等证明,讨论分如下几步:

第 1 步 先证明如下事实:设 N 是 R^2 中一同胚于闭圆盘 D^2 的区域,r 是边界 ∂N 中的一段连通闭弧,如图 7.1 所示,设 $\tilde{N}$ 是

平凡纤维丛 $N\times S^1$ 上由如下等价关系~所定义的拓扑空间：

对每一点 $x\in r$，集合 $\{x\}\times S^1$ 等同为一点，

则当 $x\notin r$ 纤维不变时，$\overline{N}$ 同胚于 3 维球体 D^3.

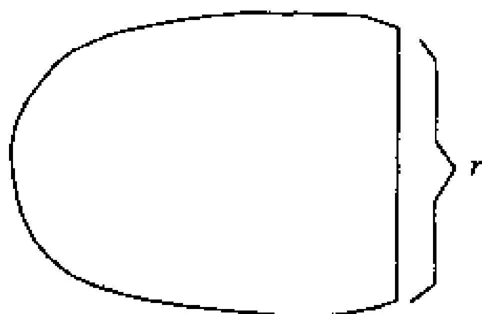


图 7.1

证明如下. 利用一同胚 h 将 N 变为一直角三角形 T(如图 7.2 所示)，并且 h 满足 $h(r)=a\cup b$. 在 $h(r)$上定义同样的等价关系$\sim_1$所得到的拓扑空间 $\overline{T}=N\times S^1/\sim_1$ 同胚于 $\overline{N}$. 另一方面，对于 b 上每一点 y，有一与 c 平行的线段交 a 于 y^1. 考虑$\overline{yy^1}\times S^1/\sim_1$，此拓扑空间显然是将柱面$\overline{yy^1}\times S^1$ 的两端等同于一点而得，因此是一球面 S^2. 另外，当取 b 上顶点 p 时，此球面则变成一点，由此可知 $\overline{T}$ 实际上(同胚意义下)是一球体 D^3.

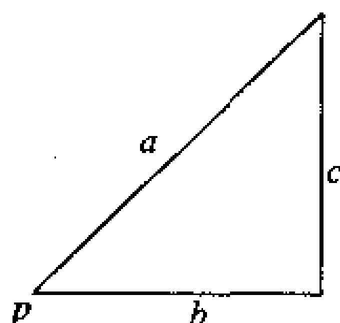


图 7.2

第 2 步　设 M 是 D^2 中挖去一小开圆盘后所得的流形，易见 $M\cong S^1\times[0,1]$. 于是，$\alpha(E)$是 $M\times S^1\cong S^1\times[0,1]\times S^1$ 上由如下等价关系$\sim_2$定义的拓扑空间：

当 $x=\bar{x}\in S^1, t\in\{0,1\}, y\in S^1, \bar{y}\in S^1$(第2个圆)时

$$(x,t,y)\sim_2(\bar{x},t,\bar{y}),$$

或

$$x=\bar{x},\quad t\in(0,1),\quad y=\bar{y}.$$

在此等价关系下有

$$\begin{aligned} M\times S^1/\sim_2 &= S^1\times[0,1]\times S^1/\sim_2 \\ &= S^1\times([0,1]\times S^1/\sim_2) \\ &= S^1\times S^2, \end{aligned}$$

因此

$$\alpha(E)\cong S^1\times S^2.$$

第3步 设 M 是由圆环面沿其边界挖去一片所得到的空间(如图7.3所示),命 $\overline{M}$ 为由纤维从 $M\times S^1$ 上如下等价关系 $\sim_3$ 所定义的拓扑空间:

当 $x\in\partial M-l$ 时,其上的纤维 S^1 等同为一点.

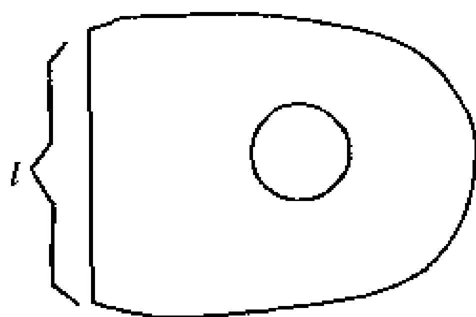


图 7.3

易证 $\overline{M}$ 是流形 $S^1\times S^2$ 中挖去一个3维小球体 D^3 而成的. 实际上,将第1步中的 N 变形再粘附于 M 上(如图7.4所示),便得一圆环面 M',从而

$$\begin{aligned} \overline{M} &\cong (M'-N)\times S^1/\sim_3 \\ &= M'\times S^1/\sim_3 - N\times S^1/\sim_3 \\ &\cong S^1\times S^2-D^3. \end{aligned}$$

第 4 步　设 M 是 D^2 中挖去 2 个开圆盘所得的空间(如图 7.5 所示),将 M 分成如图 7.6 所示的两部分,则显然有

$$\begin{aligned}\beta(M\times R^2) &= M\times S^1/\sim_4\\ &= (M_1\cup M_2)\times S^1/\sim_4\\ &= M_1\times S^1/\sim_4\cup M_2\times S^1/\sim_4.\end{aligned}$$

其中,等价关系 $\sim_4$ 为:

当 $x\in\partial M$ 时,x 上纤维 S^1 等同为一点.

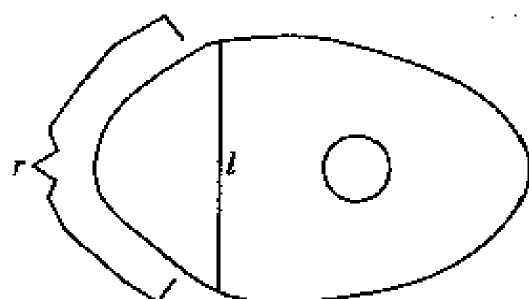


图 7.4

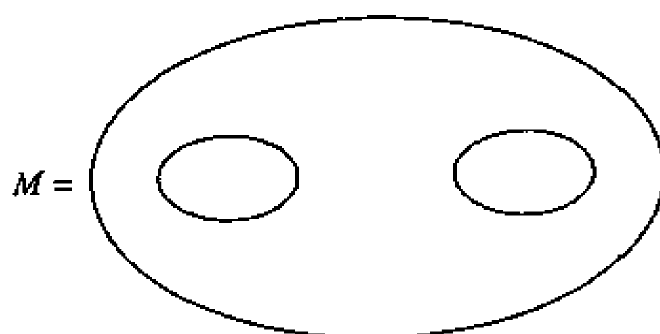


图 7.5

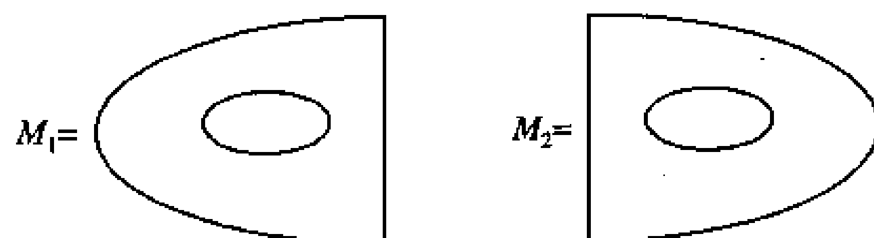


图 7.6

根据第3步，由此式易见 $\beta(M\times R^2)$ 是由 $S^1\times S^2$ 挖去一球体 D^3 与另一 $S^1\times S^2$ 挖去一球体 D^3 后再沿边界 S^2 粘合而成的，这说明 $\beta(M\times R^2)$ 是 $S^1\times S^2$ 与 $S^1\times S^2$ 的连通和. 然后对 D^2 中挖去的洞数用归纳方式讨论就可完成证明.

现在继续 Hamilton 系统能量面 E_c 的讨论. 易见可达区域 Q_c 满足

$$\begin{aligned} Q_c &\cong R^2 - (D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2 \cup D_4^2) \\ &\cong S^2 - \{P_\infty\} - (D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2 \cup D_4^2) \\ &\cong D^2 - \{P_\infty\} - (D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2). \end{aligned}$$

利用引理 7.2，易证

$$\begin{aligned} E_c &= \beta(Q_c \times R^2) \\ &\cong S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2 - \{P_\infty\} \times S^1 \\ &\cong S^1 \times S^2 \# S^1 \times S^2 - S^1. \end{aligned}$$

Young-Mills 经典场两分量模型

$TR^2=R^2\times R^2$ 上的 Hamilton 函数为

$$H(v,x) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{x_1{}^2 x_2{}^2}{2}.$$

对于 $c>0$，Q_c 是 R^2 上由4条曲线 $x_1x_2=\pm 2c$ 所界定的含原点的区域，如图 7.7 所示.

易见，Q_c 同胚于 D^2 挖去其边界上4个不同点所得到的空间. 此外，在4个无穷点 $(0,\pm\infty)$ 及 $(\pm\infty,0)$ 处，仍有（极限意义下）$\|v\|^2=2c\neq 0$，$\forall\ (v,(0,\pm\infty))\in E_c$ 及 $\forall\ (v,(\pm\infty,0))\in E_c$，于是在此4个无穷点处纤维丛 $Q_c\times S^1$ 的纤维保持不变. 设 $P_1,P_2,P_3,P_4\in\partial D^2$ 对应于这4个无穷远点，那么有

$$\begin{aligned} E_c &\cong \beta((D^2 - \{P_1,\cdots,P_4\}) \times R^2) \\ &\cong S^3 - \{P_1\} \times S^1 \cup \cdots \cup \{P_4\} \times S^1 \\ &= S^3 - S^1 \cup S^1 \cup S^1 \cup S^1. \end{aligned}$$

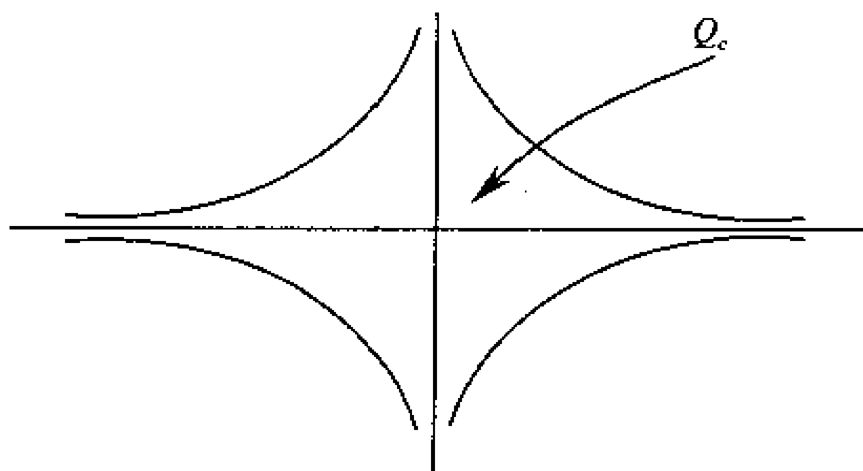


图 7.7

7.2 可达区域 Q_c 的紧致性

给定一个 Hamilton 函数，一个自然的问题是其 Hamilton 能量面 E_c 何时为紧致的，这自然就涉及到相应的可达区域 Q_c 何时为紧致的. 下面就对 Q_c 的紧致性做一些讨论.

设 $V(x)$ 是 R^n 上的光滑函数，对一正则值 c，假定水平集 $V^{-1}(c)$ 是紧致的，一个问题是：

$$Q_c = \{x \in R^n | V(x) \leqslant c\}$$

是否紧致？下面的定理对此做了一个回答.

定理 7.1 设 c 是 V 的正则值，$V^{-1}(c)$ 紧致，并且

$$\varliminf_{\|x\| \to \infty} V(x) > 0,$$

那么 Q_c 是紧致的.

证明 设 c 是 V 的正则值，$V^{-1}(c)$ 的每一个连通分支都是 R^n 中余维数为 1 的光滑正子流形. 因为 $V^{-1}(c)$ 是紧致的，故其连通分支的个数是有限的. 此外，由紧致超曲面的分离性质（见张筑生的书[3]）知，$V^{-1}(c)$ 的每一个连通分支都把 R^n 分成一有界和一无界的两个连通分支，它们分别属于

$$Q_c = \{x \in R^n | V(x) < c\}$$

和

$$R_c = \{x \in R^n | V(x) > c\}.$$

由给出的不等式条件知 R_c 是无界的，故有界的连通分支包含于 $\bar{Q}_c$ 中. 另一方面，$\bar{Q}_c$ 是有限个这样的有界分支的并，而且 $\partial Q_c = V^{-1}(c)$，故 $\bar{Q}_c$ 是紧致的.

关于能量面 E_c，下面的结论是显而易见的：

定理 7.2　设 R^n 上的光滑势函数 V 满足条件

(1) 对于 V 的正则值 c，$V^{-1}(c)$ 紧致；

(2) 下述不等式成立：

$$\varliminf_{\|x\| \to \infty} V(x) > c,$$

那么，其自然 Hamilton 系统的能量面 E_c 紧致.

7.3　一类高维 Hamilton 系统能量面的几何构造

设 H 是定义在辛空间 $TR^n = R^n \times R^n$ 上的自然 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2}\|v\|^2 + V(x), \quad (v, x) \in R^n \times R^n,$$

本节讨论当光滑势函数 V 满足某种对称性时，Hamilton 系统能量面 E_c 的几何构造. 假定势函数 V 满足如下对称性：设 $SO(n)$ 是正交变换群，我们有

$$V(Ax) = V(x), \quad \forall A \in SO(n), x \in R^n,$$

此时 V 称为 $SO(n)$ 不变的，或关于 $SO(n)$ 是对称的.

不失一般性，可设 $V(x) = V(r)$，其中 $r = \|x\|$.

定理 7.3　设在某 $r = r_0 > 0$ 处 V 取最小值 $V_{\min}$，则 $V_{\min}$ 附近有正则值 c，使得 Hamilton 系统能量面 E_c 满足

$$E_c \approx S^n \times S^{n-1}.$$

证明 显然，$V_{\min}$附近有一正则值 $c>V_{\min}$，使得

$$V(r_0-\delta_1)=V(r_0+\delta_2)=c,$$

其中，δ_1 与 δ_2 是适当的正数. 从而

$$V^{-1}(-\infty,c]=\{x\in R^n \mid r_0-\delta_1\leqslant \|x\|\leqslant r_0+\delta_2\},$$

于是有可达区域

$$Q_c=\{x\in R^n \mid r_0-\delta_1\leqslant \|x\|\leqslant r_0+\delta_2\}.$$

易见，Q_c 同胚于 $S^{n-1}\times[0,1]$，故能量面 E_c 同胚于 $S^{n-1}\times[0,1]$上的球面奇异丛 $\beta(S^{n-1}\times[0,1]\times R^n)=\beta(E)$.

另一方面，由奇异丛理论知 $\beta(E)$是由 $S^{n-1}\times[0,1]\times S^{n-1}$中等价关系～定义的商拓扑空间，其中，～定义如下：

如果

$$(x,t,y)\in S^{n-1}\times[0,1]\times S^{n-1}$$

和

$$(\bar{x},\bar{t},\bar{y})\in S^{n-1}\times[0,1]\times S^{n-1}$$

满足

$$x=\bar{x},\quad t=\bar{t}\in(0,1),\quad y=\bar{y}$$

或

$$x=\bar{x},\quad t=\bar{t}\in\{0,1\},$$

那么

$$(x,t,y)\sim(\bar{x},\bar{t},\bar{y}).$$

于是

$$\begin{aligned}\beta(E)&\cong S^{n-1}\times[0,1]\times S^{n-1}/\sim\\&\cong S^{n-1}\times([0,1]\times S^{n-1}/\sim)\\&\cong S^{n-1}\times S^n,\end{aligned}$$

故证得

$$E_c\cong S^n\times S^{n-1}.$$

更一般地，有

定理 7.4　设在某 $r=r_0>0$ 处 V 取极小值，那么有一正则值 c，使得 E_c 的某个连通分支同胚于 $S^n\times S^{n-1}$.

特别地，若 $V(r)$ 单调递增，则对任一使 Q_c 非空的正则值 c，E_c 是一球面.

注　由定理 7.3 的证明看出，若 E 是以 $S^n\times[0,1]$为底空间的平凡向量丛，则其球面奇异丛 $\beta(E)$同胚于 $S^n\times S^m$. 并且易见，若函数

$$g(x,y)=\|x\|^2+V(\|y\|),\quad (x,y)\in R^m\times R^{n-1}$$

中的 V 在某 $\|y\|=r_0>0$ 上取极小值，则对于某正则值 c，水平集 $g^{-1}(c)$同胚于 $S^m\times S^n$.

现在讨论一个具体例子，考虑 Hamilton 函数

$$H(x,y)=\|x\|^2+\|y\|^2(\|y\|^2-1),$$
$$(x,y)\in R^m\times R^{n+1}.$$

容易证明，对每一个 $-\frac{1}{4}<c<0$, $E_c=H^{-1}(c)$同胚于 $S^m\times S^n$. 此例也顺便证明了流形 $S^m\times S^n$ 可嵌入到欧氏空间 R^{m+n+1}中去. 由于 H 是一实多项式，故 $S^m\times S^n$ 也是一实代数集(见 7.4 节).

7.4　实代数集的一点讨论

现在讨论一下 7.3 节的结果同实代数集理论的一些关系. 由定义知，所谓实代数集乃是一集合 A，使得 $A=P^{-1}(0)$对某个实多项式映射 $P:R^n\to R^k$ 成立. 实代数集理论的一个中心问题是对实代数集进行拓扑分类，即一实代数集在同胚的意义下同什么样的拓扑空间等价. 反过来，人们也想知道什么样的拓扑空间(在同胚意义下)可作为某个实代数集. 人们早已知道，实代数集都是可剖分的，并且每个紧致的 P.L. 流形的内部都同胚于一实代数集[38]. 这里，我们感兴趣的是形如 $A=P^{-1}(0)$的代数集，其中，$P:R^n\to R^1$

是一实多项式函数. 易见,若一流形可作为这样的代数集,那么该流形必须是可嵌入 R^n 中的超曲面. 显然,对一流形具体找出一实多项式表示是非常有意义的. 普通解析几何中的球面、双曲面等流形的讨论都是以具体的多项式表示为基础的,一个非平庸的例子就是环面 T^2. 对于 2 维可定向流形来说,所有亏格的情形都有相应的多项式表示(从而是代数集).

例 7.1 亏格为 0 的曲面是球面 S^2,一多项式表达式为

$$P_0(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1;$$

亏格为 1 的曲面就是环面 T^2,其一多项式表达式为

$$P_1(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1;$$

亏格为 2 的曲面是球面粘上两个柄,其一多项式表达式为

$$P_2(x,y,z) = [4x^2(1 - x^2) - y^2]^2 + z^2 - \frac{1}{4},$$

等等. 对一般的高亏格情形的进一步讨论可参见 M. W. Hirsch 的工作[28].

对于高维的情形,尽管原则上知道一光滑紧致流形可表示为一实代数集,但给定一流形,找出具体的相应的实多项式决非易事,迄今还未见到很好的工作. 7.3 节的讨论附带给出了形如 $S^m\times S^n$的微分流形的多项式表示的一种范例,其方法可以推广到多个球面的直积流形上去,如下面定理所表明:

定理 7.5 设 $M^n\subset R^{n+1}$ 可以作为一光滑(多项式)函数 $g:R^{n+1}\to R^1$ 的水平集,那么存在一个光滑(多项式)函数 $f:R^{n+k+1}\to R^1$,使得 $S^k\times M^n$ 是 f 的一个水平集.

证明 设 c 是 g 的正则值,使得

$$M^n = g^{-1}(c).$$

易见存在一个 $\epsilon>0$,使得$[c-\epsilon,c+\epsilon]$中的每一个值都是 g 的正则值,于是有

$$g^{-1}[c - \epsilon,c + \epsilon]\cong M^n \times [0,1].$$

现在构造一光滑函数 $f:R^{n+k+1}\to R^1$:

$$f(x,y)=\|x\|^2+g^2(y)-2cg(y)+c^2-\varepsilon^2$$
$$=\|x\|^2+\bar{g}(y).$$

注意到 0 是 f 的一个正则值,故 $f^{-1}(0)$是 R^{n+k+1}中的一个 $n+k$ 维子流形. 另一方面,显然有

$$\bar{g}^{-1}(-\infty,0]=g^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon],$$

所以 $f^{-1}(0)$是以 $M^n\times[0,1]$为底空间的平凡球丛 $E=M\times[0,1]\times S^{k-1}$所导出的球面奇异丛 $\beta(E)$. 其中,$\beta(E)$定义如下:在 E 上定义一个等价关系～,～把每一个集合$\{x\}\times S^{k-1}$等同为一点,其中,$x\in\partial(M^n\times[0,1])=M^n\times\{0\}\cup M^n\times\{1\}$. 于是

$$\beta(E)=M\times[0,1]\times S^{k-1}/\sim$$
$$=M\times([0,1]\times S^{k-1}/\sim)$$
$$\cong M\times S^k,$$

因此

$$f^{-1}(0)\cong M\times S^k.$$

注　利用定理 7.5 与归纳法,易证任一个球积

$$M=S^{k_1}\times S^{k_2}\times\cdots\times S^{k_n}$$

都可以作为某个多项式函数

$$f:R^{k_1+k_2+\cdots+k_n+1}\to R^1$$

的水平集.

另一方面,给定一 n 元实多项式 P,弄清代数集 $P^{-1}(0)$的拓扑结构有着十分重要的意义. 因为一个 Hamilton 函数的有限 Taylor 逼近总是一实多项式,因此实代数集的研究大大有助于 Hamilton 函数在平衡点附近能量面的拓扑结构的研究.

7.5　自然 Hamilton 系统能量面的同调群

本节中,我们将利用第 6 章的奇异丛理论给出自然 Hamilton

系统能量面拓扑的一些基本结果.

定理 7.6(自然 Hamilton 系统能量面的同调群定理) 考虑辛空间 $TR^n=R^n\times R^n$ 上的自然 Hamilton 函数

$$H(v,x)=\frac{1}{2}\|v\|^2+V(x),\quad (v,x)\in R^n\times R^n.$$

设 c 是 H 的一个正则值,能量面 E_c 的同调群与可达区域 Q_c 的同调群满足下列正合序列:

$$\cdots\xrightarrow{\triangle}H_k(V^{-1}(c)\times S^{n-1})\xrightarrow{g_*}H_k(Q_c\times S^{n-1})\oplus H_k(V^{-1}(c))$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(E_c)\xrightarrow{\triangle}H_{k-1}(V^{-1}(c)\times S^{n-1})\to\cdots.$$

证明 由第 6 章奇异丛的讨论知 E_c 等价于 Q_c 上的球面奇异丛,将 E_c,Q_c 和 $\partial Q_c=V^{-1}(c)$代入定理 6.2,便得上面的正合序列.

推论 7.1 当 $k<n-1$ 时,关于 E_c 有序列

$$\cdots\xrightarrow{\triangle}H_k(V^{-1}(c))\xrightarrow{g_*}H_k(Q_c)\oplus H_k(V^{-1}(c))$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(E_c)\xrightarrow{\triangle}H_{k-1}(V^{-1}(c))\to\cdots;$$

当 $k\geqslant n-1$ 时,有序列

$$\cdots\xrightarrow{\triangle}H_k(V^{-1}(c))\oplus H_{k-n+1}(V^{-1}(c))$$
$$\xrightarrow{g_*}H_k(Q_c)\oplus H_{k-n+1}(Q(c))\oplus H_k(V^{-1}(c))$$
$$\xrightarrow{h_*}H_k(E_c)\xrightarrow{\triangle}H_{k-1}(V^{-1}(c))\to\cdots.$$

推论 7.2 设 $V^{-1}(c)$紧致连通,则当 $k=n-1$ 时有正合序列

$$\cdots\xrightarrow{\triangle}Z\oplus Z\xrightarrow{g_*}H_{n-1}(Q_c)\oplus Z\oplus Z$$
$$\xrightarrow{h_*}H_{n-1}(E_c)\xrightarrow{\triangle}H_{n-2}(V^{-1}(c))\to\cdots.$$

关于能量面 E_c 的基本群,有如下基本结果:

定理 7.7(自然 Hamilton 系统能量面基本群的基本定理) Hamilton 系统能量面 E_c 的基本群满足

$\pi_1(E_c)\approx\{\pi_1(V^{-1}(c))*\pi_1(S^{n-1})\times\pi_1(Q_c)$

$$|j_*(z)=k_*(z),\quad \forall z\in\pi_1(S^{n-1}\times\pi_1(V^{-1}(c))\},$$

其中，前面的"$*$"表示群的自由积，j,k 是由定理 6.2 的证明中构造的 E_c 的覆盖 $\{U,V\}$ 所确定的包含映射

$$j: U\cap V\to U,$$
$$k: U\cap V\to V,$$

j_* 及 k_* 是 j 及 k 所诱导的群同态.

证明　将底空间 Q_c 及其边界 $\partial Q_c=V^{-1}(c)$ 代入定理 6.3 中的表达式便得所证.

推论 7.3　若自然 Hamilton 系统的自由度 $n>2$，即底空间 Q_c 的维数大于 2，则有关系式

$$\pi_1(E_c)\approx\{\pi_1(V^{-1}(c))*\pi_1(Q_c)$$
$$|j_*(z)=k_*(z),\quad \forall z\in\pi_1(V^{-1}(c))\}.$$

推论 7.4　对于自由度不小于 2 的自然 Hamilton 系统，若 Q_c 单连通，则 E_c 也单连通.

证明　当 $n=2$ 时，因为 Q_c 单连通，故 Q_c 同胚于 D^2，从而有 $E_c\cong S^3$，故单连通.

当 $n>2$ 时，由上述推论知

$$\pi_1(E_c)\approx\{\pi_1(V^{-1}(c))$$
$$|j_*(z)=k_*(z),\quad \forall z\in\pi_1(V^{-1}(c))\}.$$

注意到覆盖 $\{U,V\}$ 满足性质

$$U\cong Q_c\times S^{n-1},$$
$$V\cong V^{-1}(c)\times D^n,$$
$$U\cap V\cong V^{-1}(c)\times(0,1)\times S^{n-1},$$

便有（根据 Q_c 的单连通性）

$$j_*(z)=e$$

及（根据关系 $\pi_1(U\cap V)\approx\pi_1(V)$）

$$k_*(z)=z,$$

于是有

$$\pi_1(E_c)\approx\{\pi_1(V^{-1}(c))\\ |k_*(z)=z=e,\quad \forall z\in\pi_1(V^{-1}(c))\}.$$

这表明 $\pi_1(E_c)\approx e$,从而 E_c 单连通.

7.6 2个自由度的自然 Hamilton 系统能量面的拓扑结构分类

本节中,我们将讨论以2维流形为构形空间的自然 Hamilton 系统的能量面,即2个自由度的自然 Hamilton 系统能量面的拓扑结构分类.

2个自由度的 Hamilton 系统能量面的拓扑结构分类已由 A. V. Bolsinov,H. R. Dullin 和 A. Wittek 在参考文献[14]中给出,本节中我们将介绍这方面的工作. 虽然我们的讨论与参考文献[14]中的初等讨论有所不同,但其思想方法仍是属于 A. V. Bolsinov 等人的.

设 M 是2维可定向光滑闭曲面,TM 是其切丛 TM 上的自然 Hamilton 函数有形式

$$H(v,x)=\frac{1}{2}\|v\|^2+V(x),\quad v\in TM_x,$$

其中,$\|\cdot\|$ 表示 M 上的某个 Riemann 度量,V 是 M 上的光滑函数.

令 h 是 H 的一个正则值,使得 $H^{-1}(h)$非空,则能量面 $E_h=H^{-1}(h)$是一3维光滑流形. 此外,假定可达区域

$$Q_h=\{x\in M|V(x)\leqslant h\}$$

是一非空紧致集合,并且 $\partial Q_h=V^{-1}(h)$是非空集合,则由前面的讨论知,E_h 是 Q_h 上的一个球面奇异丛. 令 d 表示 ∂Q_h 的连通分支个数(即圆的个数),易见 $d>0$,我们有下述主要结论:

定理 7.8 在上述条件下，能量面 E_h 的拓扑由可达区域 Q_h 的 Euler 示性数唯一确定.

证明 由于 M 是可定向曲面，故存在一个微分嵌入

$$f: M \to R^3.$$

设 $N(x)$ 是 R^3 中点 $f(x)$ 处 $f(M)$ 的法向量，则 N 是 M 在 R^3 中的一个法向量场. 由于 $d>0$，故 Q_h 上存在一个处处非零的向量场 $\zeta(x)$. 对于 Q_h 中每一个内点 x，利用 $\zeta(x)$ 可将 x 点处切平面中的圆 $\| v(x) \| = h - V(x) > 0$（为方便计，记 $v(x)$ 为 TM_x 中的向量）分成

$$\langle N(x), f_* \zeta(x) \times f_* v(x) \rangle \geqslant 0$$

与

$$\langle N(x), f_* \zeta(x) \times f_* v(x) \rangle \leqslant 0$$

两部分，这里，$f_* = \mathrm{D}f$ 是 f 的微分，$\langle , \rangle$ 表示欧氏内积，$\times$ 表示叉积. 于是，E_h 分成两个相同的部分：

$$E_h^+ = \{ (v(x), x) \in E_h \mid \langle N(x), f_* \zeta(x) \times f_* v(x) \rangle \geqslant 0 \},$$
$$E_h^- = \{ (v(x), x) \in E_h \mid \langle N(x), f_* \zeta(x) \times f_* v(x) \rangle \leqslant 0 \},$$

从而

$$E_h = E_h^+ \cup E_h^-,$$
$$\partial E_h^+ = \partial E_h^- = E_h^+ \cap E_h^-.$$

以下证明 E_h^+（或 E_h^-）等价于 $Q_h \widetilde{\times} [0,1]$，其中，$Q_h \widetilde{\times} [0,1]$ 是在直积空间 $Q_h \widetilde{\times} [0,1]$ 中将 $\{x\} \times [0,1]$，$\forall\, x \in \partial Q_h$ 压缩成一点而得到的流形，即 1 维胞腔丛 $Q_h \times [0,1]$ 的奇异丛. 显然，当 c 足够小时，映射 $\bar{f}: E_h^+ \to R^3$：

$$\bar{f}(v(x), x) = f(x) + cN(x) \langle f_* \zeta(x), f_* v(x) \rangle$$

是一微分嵌入，这是由于 f 是微分嵌入之故.

另一方面，由奇异丛的定义，E_h^- 是 Q_h 上的半圆丛的奇异丛，上面构造的嵌入 $\mathcal{J}$ 将 E_h^+ 微分同胚地映为 Q_h 在 R^3 中单位区间法丛（即 Q_h 上法丛的纤维都是[0,1]）的奇异丛，而 Q_h 的单位区间法丛显然又等价于 $Q_h\times[0,1]$，从而 $E_h^+\cong Q_h\widetilde{\times}[0,1]$. 同理，$E_h^-\cong Q_h\widetilde{\times}[0,1]$.

注意，E_h^+ 与 E_h^- 实际上是相同的，并且 E_h 可以通过将它们的边界 ∂E_h^+ 与 ∂E_h^-（由恒等同胚）等同起来而重新得到. 因此可以看出，E_h 的拓扑取决于 E_h^+ 的拓扑，而显然 E_h^+ 的拓扑又取决于 ∂E_h^+ 的拓扑.

由于 E_h^+（或 E_h^-）同胚于 $Q_h\widetilde{\times}[0,1]$，故 ∂E_h^+ 同胚于 $\partial(Q_h\widetilde{\times}[0,1])$. 另一方面，$\partial(Q_h\widetilde{\times}[0,1])$ 相当于 Q_h 与其一个复制 Q_h' 沿着边界 $\partial Q_h=\partial Q_h'$（按恒等同胚）粘合起来而得的 Q_h 的一个"加倍"，而 Q_h 的拓扑由 Q_h 的亏格 g 及其边界连通分支个数 d 确定，其 Euler 示性数为

$$\chi(Q_h)=2-2g-d,$$

故由代数拓扑中的一个简单论证知

$$\begin{aligned}\chi(\partial(Q_h\widetilde{\times}[0,1]))&=\chi(Q_h)+\chi(Q_h')-\chi(\partial Q_h)\\&=2\chi(Q_h)-\chi(\partial Q_h).\end{aligned}$$

因为 ∂Q_h 是有限个圆的无交并，故 $\chi(\partial Q_h)=0$，因此

$$\chi(\partial(Q_h\widetilde{\times}[0,1]))=2\chi(Q_h)=2-2(2g+d-1),$$

这也顺带表明 $\partial(Q_h\widetilde{\times}[0,1])$ 的亏格是 $2g+d-1=1-\chi(Q_h)$.

由于 2 维可定向闭曲面的拓扑由其 Euler 示性数唯一确定，故 $\partial(Q_h\widetilde{\times}[0,1])$ 由 $\chi(Q_h)$ 唯一确定，从而 E_h 由 Q_h 唯一确定.

由上面的讨论知，既然 $\partial(Q\widetilde{\times}[0,1])$ 的拓扑仅与 $\chi(Q)$ 有关，

那么对于具有不同亏格和不同边界连通分支个数的可达区域 Q_1 和 Q_2 来说，仍有 $\partial(Q_1\widetilde{\times}[0,1])$ 同胚于 $\partial(Q_2\widetilde{\times}[0,1])$，只要 $\chi(Q_1)=\chi(Q_2)$ 满足就行. 在这种情况下，与 Q_1 相关的能量面同与 Q_2 相关的能量面仍是同胚的. 由此可见，若要搞清楚具有亏格 g 且边界连通分支个数为 d 的可达区域上的能量面的拓扑结构，只需弄清楚亏格为 0 且其边界连通分支个数为 $2g+d$ 的曲面上的相应能量面的拓扑结构即可. 显然，这样的曲面无非是球面 S^2 上挖去 $2g+d$ 个洞，这等价于平面上一个圆盘中挖去 $2g+d-1$ 个洞. 综合上面的讨论，易得下面的具体结果：

定理 7.9　设 Q_h 是边界非空的可达区域，那么有

(1) 若 Euler 示性数 $\chi(Q_h)=1$，则能量面 E_h 同胚于 S^3；

(2) 若 $\chi(Q_h)<1$，则 E_h 同胚于 $1-\chi(Q_h)$ 个 $S^1\times S^2$ 的连通和.

证明　易见，只要考虑平面上的可达区域 Q_h 就够了.

(1) 这时，Q_h 是一个无洞闭盘 D^2，于是有

$$E_h^+(\text{或 } E_h^-)\approx Q_h\widetilde{\times}[0,1]\approx D^3.$$

将两个 D^3 沿其公共边界 S^2 做恒等粘合，便得到

$$E_h\approx S^3.$$

(2) 不妨先考虑 $\chi(Q_h)=0$ 的情况，这时 Q_h 是一个圆环. 此时有

$$E_h^+(\text{或 } E_h^-)\approx Q_h\widetilde{\times}[0,1]\approx D^2\times S^1,$$

将两个 $D^2\times S^1$ 沿着边界 T^2 做恒等粘合，便得到

$$E_h\approx S^1\times S^2.$$

现在设 $\chi(Q_h)=-1$，则 Q_h 相当于圆盘 D^2 中挖出 2 个洞，于是

$$E_h^+(\text{或 } E_h^-)\approx Q_h\widetilde{\times}[0,1]$$

是边界曲面的亏格为 $1-\chi(Q_h)=2$ 的 3 维流形. 把该 3 维流形进行 Heegard 分割,将其分成各含一个环柄的 2 个流形,便得到 2 个实心环体 $S^1\times D^2$,其割面是一个圆盘 D^2. 将这 2 个 $S^1\times D^2$ 沿其边界分别同各自的复制做恒等粘合,并注意将割面 D^2 处除外,则得到 2 个 $S^1\times S^2$,它们都被挖去一个 3 维球体 D^3. 该球体的边界实际上是将原来的面 D^2 同其复制沿边界恒等粘合而得到的球面 S^2. 最后,将 2 个 $S^1\times S^2$ 沿着被挖球体 D^3 的边界重新做恒等粘合,便又得到原来的能量面 E_h. 由连通和的定义看出,E_h 正好是 $S^1\times S^2$ 与 $S^1\times S^2$ 的连通和,于是

$$E_h \approx S^1\times S^2 \# S^1\times S^2.$$

对于 $\chi(Q_h)<-1$ 时的情形,利用同样的思想进行归纳法讨论便可完成证明.

注 (1) 上述讨论中,沿着公共边界用恒等同胚做边界粘合是关键的,否则 Euler 示性数 $\chi(Q_h)$ 不能保证相应的能量面拓扑的唯一性. 比如,2 个 $S^1\times D^2$ 沿其边界利用不同的微分同胚做粘合,便会得到不同的流形,即球面 S^3, $S^1\times S^2$ 与 RP^3.

(2) 人们也许会问,上述定理能否推广到 3 个以上自由度的自然 Hamilton 系统上去?显然,利用本节的思想是做不到的,因为在高维情形,无法像 2 维情形那样利用微分嵌入将切丛上的有关结构转到法丛上的相应结构.

第 8 章　整体 Poincaré 截面存在性的拓扑障碍

在动力系统理论中，Poincaré 截面的存在性以及 Poincaré 映射的研究是中心课题之一. 局部 Poincaré 截面的存在性等问题已得到较深入的研究，但整体 Poincaré 截面的讨论，就我们所知，除了基本概念讨论[2,32]外尚无严格的理论. 由于整体 Poincaré 截面的存在与否在相当程度上是一个拓扑问题，因此有必要从拓扑学角度对此加以探讨.

8.1　整体 Poincaré 截面

首先我们回顾一下连续（可微）流的概念[37]. 设 M 是光滑紧致流形，$\mathrm{Diff}^r(M)$是 M 上所有 c^r 微分同胚组成的集合. M 上一个 c^r（连续）流 φ_t 乃是一单参数 c^r 微分同胚群

$$\varphi: R \to \mathrm{Diff}^r(M),$$

且具有性质

（1）$\varphi_0: M \to M$ 是恒等映射；

（2）$\varphi_t\varphi_s = \varphi_{t+s}$（群性质）.

易见，一个 c^r 流 φ_t 决定一个 c^{r-1}向量场：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_t(x)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = X(x) \in TM_x, \quad x \in M, \qquad (8.1)$$

而 $\varphi_t(x)$是该向量场所定义的常微分方程满足初始条件 $\varphi_0(x)=x$ 的解，并被称作流 φ_t 过 x 的轨道. 通常，参数 t 被视为时间变量.

按照 A. G. Kusnirenko[32]及 S. Smale[41]等人的讨论，整体

Poincaré 截面如下定义：

定义 8.1 令 M 是一紧致光滑连通流形，φ_t 是 M 上的一个 c^r 流($r\geqslant 1$). 如果存在一紧致光滑、余维数为 1 的子流形 $N\subset M$ 满足下列性质：

(1) φ_t 的每一条轨道至少同 N 横截相交于一点；

(2) 对于任一点 $x\in N$，存在一个最小时间 $\tau(x)>0$，使得 $\varphi_{\tau(x)}(x)\in N$，

那么 N 叫做整体 Poincaré 截面.

对于每一点 $x\in N$，令 $\varphi(x)$表示轨道 $\varphi_t(x)$当 $t>0$ 时同 N 的第一个横截相交的点，即 $\varphi(x)=\varphi_{\tau(x)}(x)\in N$，则得到所谓的 Poincaré 映射 $\varphi:N\to N$. 易见，Poincaré 映射是一微分同胚.

不难看出，一流形 M 上的流如果有一整体 Poincaré 截面，那么 M 的 Euler 示性数为 0. 此断言可证明如下：

首先证明若 φ_t 有整体 Poincaré 截面，那么相应的向量场 X ((8.1)式)必无奇点. 实际上，若不然，则可设 x_0 为 X 的一个奇点，即 $X(x_0)=0$. 由于 φ_t 是参数微分同胚群，故切映射 φ_{t*}将轨道 $\varphi_t(x_0)$在 x_0 处的切向量$X(x_0)$映到 $\varphi_t(x_0)$处的切向量，即 $\varphi_{t*}(X(x_0))=X(\varphi_t(x_0))$，但$X(x_0)=0$，故 $\varphi_t(x_0)$的切向量都为 0，这表明轨道 $\varphi_t(x_0)$只能是一常点 x_0. 另一方面，设 $x_0\notin N$，则 $\varphi_t(x_0)\cap N=\varnothing$，同定义 8.1 性质(1)中的交点存在性矛盾. 若 $x_0\in N$，则$\{\varphi_t(x_0)\}\subset N$，这又同定义 8.1 性质(1)中的横截性矛盾. 因此，X 无奇点. 由微分拓扑的知识知，M 的 Euler 示性数只能为 0.

8.2 以 S^1 为底空间的纤维丛

在这一节中，我们讨论纤维丛的有关基本事实.

命题 8.1 考虑一纤维丛(M,S^1,N,p)，其中，M 是全(丛)空

间，S^1 是底空间，N 是纤维，p 是投射. 若 M 是紧致且局部道路连通的，则有

$$\frac{\pi_1(M)}{\pi_1(N)} \approx Z. \tag{8.2}$$

证明　关于纤维丛，有如下正合序列[33]：

$$0 = \pi_2(S^1) \to \pi_1(N) \to \pi_1(M) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1),$$

由同态定理可知

$$\frac{\pi_1(M)}{\pi_1(N)} \approx p_*(\pi_1(M)).$$

由于 $p_*(\pi_1(M))$ 是 $\pi_1(S^1)=Z$ 的子群，故欲证本命题，只须证明 p_* 是非平凡映射即可. 取 M 的一个局部平凡化

$$p^{-1}(U) \cong U \times N,$$

其中，$U \subset S^1$ 是一开集，考虑复合映射

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times N \xrightarrow{\text{投影}} N,$$

这是一个连续满射. 由于 $p^{-1}(U) \subset M$ 是开集，M 是局部道路连通的，故 $p^{-1}(U)$ 局部道路连通，从而 N 也局部道路连通. 此外，N 作为 M 的纤维是 M 的闭集，由 M 的紧致性知 N 也紧致. 故 N 有有限个道路连通分支. 取 $b \in S^1$，设 $\pi_1(S^1,b)$ 的生成元为 $[\delta]$，其中

$$\delta: [0,1] \to S^1$$

为以 b 为基点的闭路. 取 $p^{-1}(b)=N$ 中一点 x_0，则由纤维丛理论知，δ 有一提升 $\delta_0:[0,1]\to M$，使得 $\delta_0(0)=x_0$. 显然有

$$\delta_0(1) = x_1 \in p^{-1}(b) = N.$$

假如 x_0 与 x_1 在 N 的同一道路连通分支内，则可取一道路 $\gamma:[0,1]\to N$，使得 $\gamma(0)=x_1$，$\gamma(1)=x_0$，于是 $\delta_0 * \gamma$ 是以 x_0 为基点的闭路，并且 $p_*[\delta_0 * \gamma]=[\delta]$，从而有 $p_* \neq 0$. 若 x_0，x_1 属于 N 的不同连通分支，那么再取一提升 δ_1，满足 $\delta_1(0)=x_1$. 记 $\delta_1(1)=x_2$，则又可取 δ_2，使得 $\delta_2(0)=x_2$，记 $\delta_2(1)=x_3$，如此等等. 由于 N

的道路连通分支的有限性，如此下去，总存在两个数 $0\leqslant i<j$，使得 x_i 与 x_j 属于同一个分支，于是有一道路 $\bar{\gamma}$ 连接与 x_i 与 x_j，即有 $\bar{\gamma}(0)=x_j,\bar{\gamma}(1)=x_i$，从而 $\delta_{i+1}*\delta_{i+2}*\cdots*\delta_j*\bar{\gamma}$ 是以 x_i 为基点的闭路，易见有

$$p_*[\delta_{i+1}*\delta_{i+2}*\cdots*\delta_j*\bar{\gamma}]=(j-i)[\delta],$$

这表明 p_* 是非平凡的. 因为 Z 的任一非平凡子群都是一个元生成的自由群，从而与 Z 同构，故(8.2)式成立.

由上述证明看出，若 N 道路连通，则 $p_*[\delta_0*\gamma]=[\delta]$，故有下面的结论：

命题 8.2 若 N 道路连通，则纤维丛(M,S^1,N,p)的基本群有正合序列

$$0\rightarrow\pi_1(N)\rightarrow\pi_1(M)\rightarrow\pi_1(S^1)\rightarrow 0.$$

8.3 流的整体 Poincaré 截面存在性的拓扑障碍

8.2 节已说明，若微分流形 M 上的可微流 φ 有一整体 Poincaré 截面，则 M 的 Euler 示性数为 0. 不仅如此，实际上 M 还有更细致的结构，如下面的定理所述：

定理 8.1 若 M 上的可微 φ 流有一整体 Poincaré 截面 N，那么 M 有一个以 S^1 为底空间、以 N 为纤维的纤维丛结构(M,S^1,N,p).

此定理已被 A. V. Bolsinov 所意识到，但无论在其论文[14]还是在其所提的参考文献[16]中都无严格证明. 尽管这个命题很直观，但要给出一个证明却非易事，以下的讨论说明了这一点. 为证明定理 8.1，首先需要下述结论：

引理 8.1(管状流定理) 命 M 是一微分流形，$\mathscr{X}^r(M)$是 M 上 C^r 向量场组成的空间. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，$p\in M$ 是 X 的一个正常

点，即 $X(p)\neq 0$. 令 $c=\{(x^1,\cdots,x^m)\in R^m \mid |x^i|<1\}$为一单位正方体，而 X_c 为 c 上由 $X_c(x)=(1,0,\cdots,0)$定义的单位向量场，那么存在 p 的一个邻域(称作管状邻域)$V_p\subset M$ 及一个 c^r 微分同胚 $h:V_p\to c$，把 X 在 V_p 中的轨道(积分曲线)映为 X_c 的轨道.

设 φ_t 是由向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$生成的可微流，对于正常点 $p\in M$，$\varphi_t(p)$是以 p 为初始点的非平凡轨道. V_p 是满足引理 8.1 中条件的开邻域. 令 D_1 与 D_2 是含于 V_p 中且与 $\varphi_t(p)$横截相交的余维数为 1 的超曲面片，它们都 c^r 微分同胚于 $m-1$ 维球体. 不失一般性，设对每一点 $x\in D_1$，$\varphi_t(x)$都与 D_2 相交(只要 D_1 取得足够小). 设相交时刻为 $t(x)$，即 $\varphi_{t(x)}(x)\in D_2$. 易见 t 是 x 的函数，而 $\varphi=\varphi_{t(x)}(x)$是 D_1 到 D_2 的一个子集的映射. 我们有如下结论：

引理 8.2　(1) φ是 D_1 到 $\varphi(D_1)\subset D_2$ 的微分同胚；

(2) $t(x)$是 c^r 函数.

证明　结论(1)是众所周知的事实，其证明亦可参见参考文献[37]. 现在证明结论(2). 由引理 8.1 知存在一个 c^r 微分同胚 $h:V_p\to c$，把 V_p 中 X 的轨道映到 c 中 X_c 的轨道，并且 $h(D_1)$与 $h(D_2)$也与 X_c 的轨道横截相交(如图 8.1 所示). 在 c 中，作为 X_c 的轨道，点 $h(x)$到点 $h(\varphi(x))$的时间正好是 $h(x)$到 $h(\varphi(x))$的距离，这是一个 c^r 函数，设为 $s(x)$，于是有 $t(x)$的关系式

$$t(x)=h^{-1}(s(x)),$$

从而 $t(x)$是 c^r 函数. 证毕.

现在考虑定义 8.1 中整体 Poincaré 截面 N 所涉及的最小时间函数 $\tau(x)$的可微性问题.

引理 8.3　定义 8.1 中的函数 $\tau(x)$是 c^r 函数.

证明　取点 $x\in N$，在时刻 $\tau(x)$时 $\varphi_{\tau(x)}\in N$，于是轨道

$$\varphi_{s\tau(x)}(x),\quad 0\leqslant s\leqslant 1$$

是 M 中的紧致子集，且其上任一点都是正常点. 从而有一族有限多个引理 8.1 所要求的管状邻域构成的有限开覆盖$\{U_i | i=1,\cdots,$

$n\}$，它覆盖了轨道$\{\varphi_{s\tau(x)}(x)\,|\,0\leqslant s\leqslant 1\}$．为进一步讨论，赋予 M 一

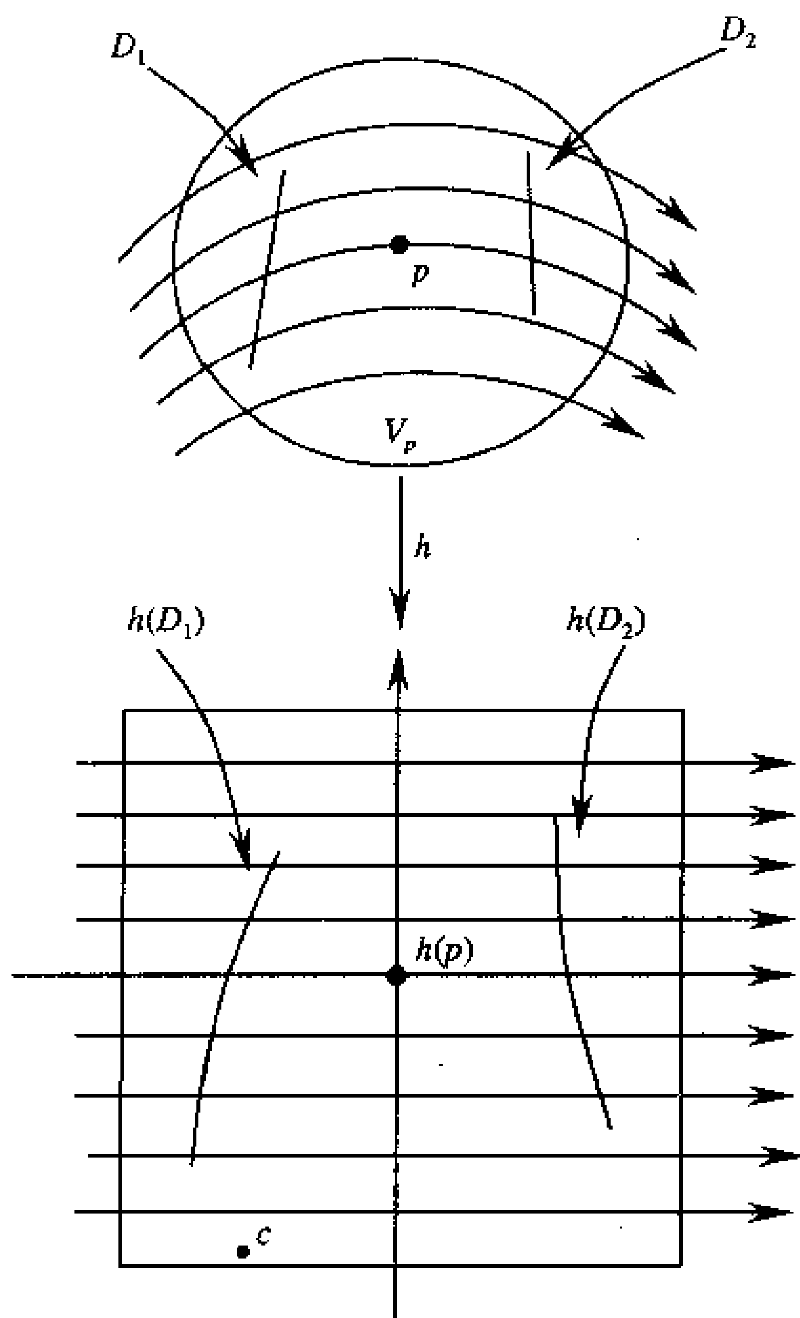


图 8.1

个 Riemann 度量，使得 M 成为一个度量空间．由点集拓扑的 Lebesgue 数定理知，存在一个常数 $\lambda>0$，使得当$[0,1]$的一个分划 $0=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_n=1$ 满足 $s_i-s_{i-1}<\lambda, i=1,\cdots,n$ 时，每一段

轨道$\{\varphi_{t\tau(x)}(x)\,|\,s_{i-1}\leqslant x\leqslant s_i\}$都含于某个管状领域$U_i$中. 对于给定的满足$s_i-s_{i-1}<\lambda$的一个分划$0=s_0<s_1<\cdots<s_n=1$,由于$n$的有限性,总可选取$x\in N$的一个足够小邻域$D_x$,使得$\varphi_{s_{i-1}\tau(x)}(D_x)$与$\varphi_{s_i\tau(x)}(D_x)$都含于同一个管状领域$U_j$中. 根据引理 8.2,映射

$$\varphi_x^i:\ \varphi_{s_{i-1}\tau(x)}(D_x)\to\varphi_{s_i\tau(x)}(D_x)$$

是c^r微分同胚,τ_i作为点$\varphi_{s_{i-1}\tau(x)}(x)$到点$\varphi_{s_i\tau(x)}(x)$的时间也是$c^r$函数. 由于

$$\tau(x)=\sum_{i=1}^{h}\tau_i(\varphi_x^i(x)),$$

故$\tau(x)$也是c^r函数,证毕.

定理 8.1 的证明　定义$N\times[0,1]\to M$的映射如下:

$$F(x,s)=\varphi_{s\tau(x)}(x),\quad \forall\ x\in N,s\in[0,1].$$

由前面的讨论知F是c^r映射,从整体 Poincaré 截面的定义知F是满射. 实际上,任取$y\in M$,则轨道$\varphi_t(y)$与N相交,设此交点为$z=\varphi_{t_0}(y)$. 下面分两种情形讨论:

(1) 若$t_0>0$,则取$\varphi_t(y)$的负半轨$\varphi_-(y)=\{\varphi_t(y)\,|\,t\leqslant 0\}$,今证$\varphi_-(y)$与$N$必有交点. 设不然,则由拓扑动力学的极限集理论知$\varphi_t(y)$的$\alpha$-极限集$\alpha(y)$与$N$也无交点,由于极限集是不变集,这又同定义 8.1 的条件(1)矛盾. 于是,必有一个$t'<0$,使得$\varphi_{t'}(y)\in N$. 令$\bar{y}=\varphi_{t'}(y)$,则有

$$F\left(\bar{y},-\frac{t'}{\tau(\bar{y})}\right)=\varphi_{-\frac{t'}{\tau(\bar{y})}\cdot\tau(\bar{y})}=y.$$

(2) 若$t_0<0$,则

$$F\left(z,-\frac{t_0}{\tau(z)}\right)=\varphi_{-t_0}(b)=y.$$

由此可见F是满的. 另一方面,由于不同轨道上的点在F的作用下映到不同轨道上的点,从而$F:N\times[0,1]\to M$还是单的. 此外,由$\tau(x)$的定义知

$$F(N,0) = F(N,1).$$

由于 $S^1=[0,1]/\sim$，其中，关系～表示{0}与{1}等同为一点，故 M 可赋予以 S^1 为底空间、以 N 为纤维的纤维丛结构. 证毕.

注 上述证明中的结论 $\varphi_-(y)\cap N\neq\varnothing$ 可详细证明，首先需要下面的定义与引理：

定义 8.2 设 φ_t 是紧致光滑流形 M 上的一个流. 对于一点 $x\in M$，x 的 α-极限集 $\alpha(x)$ 是下面的集合：

$$\{z\in M \mid 存在一个序列\ t_k\to-\infty，使得\ \varphi_{t_k}(x)\to z\},$$

集合 $\alpha(x)$ 中的每一点称为轨道 $\varphi_t(x)$ 的(α-)极限点.

引理 8.4 设 z 是 $\varphi_t(x)$ 的极限点，则轨道 $\varphi_t(z)$ 上的每一点都是 $\varphi_t(x)$ 的极限点.

下面证明 $\varphi_-(y)\cap N\neq\varnothing$. 考虑 α-极限集 $\alpha(y)$，由于 M 是紧致的，故 $\alpha(y)$ 非空. 取一点 $z\in\alpha(y)$，根据整体 Poincaré 截面的定义，轨道 $\varphi_t(z)$ 与 N 有一交点 z'. 于是有一序列 $t_k\to-\infty$，使得 $\varphi_{t_k}(y)\to z'$. 此外，因为 $\varphi_t(z)$ 与 N 在点 z' 横截相交，而点 z' 又是 N 的一个内点(注意，这里所指的流形都是无边流形)，故存在一个足够大的一 t_k，当 $t<t_k$ 时 $\varphi_t(y)$ 与 N 也必有交点，因此 $\varphi_-(y)\cap N\neq\varnothing$.

定理 8.2 若紧致光滑流形 M 单连通，那么 M 上的任何可微流都没有整体 Poincaré 截面.

证明 由定理 8.1 知，若 M 上某个可微流有整体 Poincaré 截面 N，则 M 有一纤维丛结构 (M,S^1,N,p). 由命题 8.1 又知，此时有

$$\frac{\pi_1(M)}{\pi_1(N)}\approx Z,$$

这表明 $\pi_1(M)$ 非平凡，从而与 M 的单连通假设矛盾. 证毕.

第 9 章 Maupertuis 原理在自然 Hamilton 系统理论中的应用

Hamilton 系统理论中有一个经典思想被人们称为 Maupertuis-Jacobi 原理，其想法是将 Hamilton 系统的轨道视为某一相应 Riemann 流形上的测地线. 运用 Maupertuis-Jacobi 原理，人们自然可以把微分几何的理论结果应用于 Hamilton 系统的研究之中. 近年来，Maupertuis-Jacobi 原理又重新受到人们的重视，有的学者以 Maupertuis-Jacobi 原理为基础，将微分几何理论与拓扑学理论熔为一炉，对光滑流形上 Hamilton 系统的可积性作了深入研究，而另外一些学者则利用 Maupertuis-Jacobi 原理与微分几何中的曲率理论对 Hamilton 系统的混沌理论做了有益的探讨.

本章将介绍著名的 Maupertuis-Jacobi 原理及其在自然 Hamilton 系统可积性理论与混沌理论中的若干应用.

9.1 Maupertuis-Jacobi 原理

设 M 是一个 n 维 Riemann 流形，TM 是 M 上的切丛，这是一个 $2n$ 维光滑流形. 考虑 TM 上的一个自然 Hamilton 函数

$$H(x,v)=\frac{1}{2}\|v\|^2+V(x),$$

其中，$V(x)$是构形空间 M 上的势函数，$v\in TM_x$，$\|\cdot\|$ 表示由 M 的 Riemann 度量 $\mathrm{d}s^2=\sum\limits_{i,j}g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 诱导的模，$\frac{1}{2}\|v\|^2$ 表示

动能.

著名的 Maupertuis-Jacobi 原理可表述如下：

定理 9.1 设 $Q_h \subseteq M$ 是由不等式

$$V(x) < h$$

定义的构形空间的子集，称为可达(构形)空间，则

$$\mathrm{d}\rho = \sqrt{2(h - V(x))}\mathrm{d}s$$

是 Q_h 上一个新的 Riemann 度量，并且 $H(x,v)$ 在能量面 $H(x,v)=h$ 上的轨道是新 Riemann 度量 $\mathrm{d}\rho$ 下的测地线. 反之，在 $\mathrm{d}\rho$ 下的测地线必是 $H(x,v)$ 的轨道.

证明 显然，$\mathrm{d}\rho$ 是 Q_h 上的一个 Riemann 度量，故只需证明第 2 个断言. 为了方便，我们考虑 $M=R^n$，且 Riemann 度量为 $g = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_i$ 的情形，对微分几何理论熟悉的读者可按此思路自行完成一般 Riemann 流形情形的讨论. 当 $M=R^n$ 时，$H(x,v)$ 可具体表示为

$$H(x,v) = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + \cdots + m_n v_n^2) + V(x_1, \cdots, x_n),$$

此时 Q_h 上的新 Riemann 度量为

$$\mathrm{d}\rho^2 = 2(h - V(x))(m_1 \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + m_n \mathrm{d}x_n^2).$$

由最小作用量原理知，拉格朗日量

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \mathrm{d}t$$

在 $H(x,v)$ 的轨道上取极值，即 W 的变分

$$\Delta W = 0.$$

另一方面，在能量面 $H=h$ 上有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = 2(h - V(x_1, \cdots, x_n)),$$

故得

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{d}x_i}}{\sqrt{2(h-V)}}.$$

将其代入上述拉格朗日量中，得

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(h-V)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m \mathrm{d}x_i^2}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}\rho.$$

因为 W 沿 Hamilton 系统轨道的变分 $\Delta W=0$，故由上式知 Hamilton 系统的轨道是 $\mathrm{d}\rho$ 的测地线.

反之，设 Q_h 中的一条曲线 $l(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 是在新 Riemann 度量 $\mathrm{d}\rho$ 下的一条测地线. 则对任意 $t_1<t_2$，$l(t)(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 是积分（泛函）

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(h-V)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m x_i(t) \mathrm{d}t}$$

的驻点. 利用简单的变分原理易证，$l(t)$ 满足方程组

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \\ \cdots, \\ m_n \ddot{x}_n(t) = -\dfrac{\partial V}{\partial x_n}, \end{cases}$$

从而 $l(t)$ 满足 Hamilton 方程. 证毕.

注 由 Maupertuis-Jacobi 原理可知，Hamilton 系统 $H(x,v)$ 在能量面 $H(x,v)=h$ 上的轨道可视为可达空间 Q_h 上以 $\mathrm{d}\rho$ 为 Riemann 度量的测地线. 另一方面，由 1.4 节可知，对 $(Q_h,\mathrm{d}\rho)$ 上的测地线，Q_h 上的 Riemann 度量 $\mathrm{d}\rho$ 可定义 Q_h 上的单位球丛 Σ^{2n-1} 上的一个动力系统的积分曲线；对 Q_h 上的测地线 $r(t)$，有

$(r(t), v(r(t))) \subset \Sigma^{2n-1}$,其中,$v(r(t))$是在点 $r(t)$处的单位切向量.于是,$(r(t), v(r(t)))$定义了 Q_h 上一个新的(在新度量 $\mathrm{d}\rho$ 下的)测地流.

9.2 自然 Hamilton 系统可积性的拓扑障碍

本节将以 Maupertuis-Jacobi 原理为中介,利用微分几何与拓扑学知识对自然 Hamilton 系统的可积性与构形空间的拓扑做一些讨论.

首先,我们证明如下事实:

定理 9.2 设 M^{2n}是一个 $2n$ 维辛流形,$H(p,q)$是 M^{2n}上的一个 Hamilton 函数,由其决定的 Hamilton 系统为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \cdots, \\ \dfrac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \cdots, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}. \end{cases} \tag{9.1}$$

如果(9.1)的积分轨道是 Liouville 可积的,并且有界,则(9.1)的邻近轨道彼此分离的距离平均值是时间 t 的线性函数,即从平均意义上讲,邻近轨道至多是以线性函数的形式发散的(注意,混沌轨道是以指数形式发散的).

证明 因为(9.1)是 Liouville 可积的,故有一解析正则变换

$$
\begin{cases}
q_1 = Q_1(I_1, I_2, \cdots, I_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n), \\
\cdots, \\
q_n = Q_n(I_1, I_2, \cdots, I_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n), \\
p_1 = P_1(I_1, I_2, \cdots, I_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n), \\
\cdots, \\
p_n = P_n(I_1, I_2, \cdots, I_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n),
\end{cases}
$$

使得方程组(9.1)变为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial K(I)}{\partial \theta_1}, \\
\cdots, \\
\dfrac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial K(I)}{\partial \theta_n}, \\
\dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial K(I)}{\partial I_1} \equiv \omega_1(I), \\
\cdots, \\
\dfrac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial K(I)}{\partial I_n} \equiv \omega_n(I),
\end{cases}
\tag{9.2}
$$

这里

$$K(I) = K(I_1, \cdots, I_n) = H(P_1, \cdots, P_n, Q_1, \cdots, Q_n).$$

于是,对于一初始值 $I_i = I_i^0, \theta_i = \theta_i^0, i = 1, \cdots, n$,方程组(9.2)的解有形式

$$
\begin{cases}
I_1 = I_1^0,\ \theta_1 = \omega_1(I_1^0, \cdots, I_n^0)t + \theta_1^0, \\
\cdots, \\
I_n = I_n^0,\ \theta_n = \omega_n(I_1^0, \cdots, I_n^0)t + \theta_n^0.
\end{cases}
\tag{9.3}
$$

令 $(p_1(t), \cdots, p_n(t), q_1(t), \cdots, q_n(t))$ 表示方程组(9.1)的与(9.3)对应的解,则有

$$\begin{cases} p_1(t) = p_1(I^0, \omega(I^0)t + \theta^0), \\ \cdots, \\ p_n(t) = p_n(I^0, \omega(I^0)t + \theta^0), \\ q_1(t) = \theta_1(I^0, \omega(I^0)t + \theta^0), \\ \cdots, \\ q_n(t) = \theta_n(I^0, \omega(I^0)t + \theta^0). \end{cases} \tag{9.4}$$

为研究解(9.4)的邻近解的性态，设与(9.4)邻近的解为

$$\begin{cases} \bar{p}_i(t) = p_i(t) + p_i^\varepsilon(t), \\ \bar{q}_i(t) = q_i(t) + q_i^\varepsilon(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

这里，诸 $p_i^\varepsilon(t)$ 与 $q_i^\varepsilon(t)$ 都是"小"项. 由此，根据(9.1)得到变分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_i^\varepsilon}{\mathrm{d}t} = -\sum_j \left[\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right)_0 p_j^\varepsilon + \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_j^\varepsilon\right], \\ \dfrac{\mathrm{d}q_i^\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left[\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)_0 p_j^\varepsilon + \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\right)_0 q_j^\varepsilon\right], \end{cases} \tag{9.5}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n,$$

这里，$\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\right)$ 表示在 $(p(t), q(t))$ 处求导. 由(9.4)知，(9.5)的解可以由函数 $(P_1, \cdots, P_n, Q_1, \cdots, Q_n)$ 的导数表示出来，故(9.5)的一般解有形式

$$\begin{cases} p_i^\varepsilon(t) = \sum_j \left[\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial I_j^0}\right)_0 \delta_j + \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial \theta_j^0}\right)_0 (\Delta\omega_j t + \eta_j)\right], \\ q_i^\varepsilon(t) = \sum_j \left[\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial I_j^0}\right)_0 \delta_j + \left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial \theta_j^0}\right)_0 (\Delta\omega_j t + \eta_j)\right], \end{cases} \tag{9.6}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中，诸 δ_j, η_j 是任意常数，而

$$\Delta\omega_j = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \omega_j(I^0)}{\partial I_k^0}\right) \delta_k.$$

由于解 $(p_1(t), \cdots, p_n(t), q_1(t), \cdots, q_n(t))$ 是有界的，并且是周期的

或几乎周期的，故(9.6)的系数也如此. 因此，如果 $\Delta\omega_i\neq 0$，则诸 $p_i^\varepsilon(t)$，$q_i^\varepsilon(t)$ 的绝对值至多以 t 的线性函数方式增长.

注意到

$$\begin{cases} p_i^\varepsilon(t) = \bar{p}_i(t) - p_i(t), \\ q_i^\varepsilon(t) = \bar{q}_i(t) - q_i(t), \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

便知定理成立.

由第 1 章 1.5 节及上面的定理 9.2，可立刻推出下述结果：

定理 9.3 设 $H(x,v)=\frac{1}{2}\|v\|^2+V(x)$ 是 Riemann 流形 (M,g) 的切丛 TM 上的自然 Hamilton 系统. 设常数

$$h > \max_{x\in M} V(x),$$

若 M 上由新度量

$$\begin{aligned} d\rho^2 &= 2(h - V(x))ds^2 \\ &= 2(h - V(x))\sum_{i,j} g_{ij}(x)dx^i dx^j \end{aligned}$$

诱导的截面曲率是负的，则 $H(x,v)$ 是不可积的.

关于 2 维紧致流形上定义的自然 Hamilton 系统的可积性，有下述著名结果：

定理 9.4 若 M 是一紧致的 2 维光滑流形，其亏格大于 1，那么 TM 上的任一自然 Hamilton 系统

$$H(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + V(x), \quad x \in M, v \in TM_x$$

在能量面 $H(x,v)=h\,(h>\max_{x\in M} V(x))$ 上都不可积.

该定理的证明主要是建立在对不稳定周期轨道的分析之上的，因为 M 的亏格大于 1，所以其 Euler 示性数是负的，根据经典的 Gauss-Bonnet 定理，M 上的任一 Riemann 度量下的平均 Gauss 曲率都为负值. 如果 $d\rho^2$ 诱导的 Riemann 度量使得相应的 Gauss 曲率处处为负，则结论是显然的，因为相应的测地流是一

Anosov 流. 在这种情形下，M 上单位球面从 Σ^3 中的测地流的周期轨道的集合在 Σ^3 中是稠密的，并且都是不稳定的轨道，故 $H(x,v)$在 TM 上是不可积的. 至于 Gauss 曲率非处处为负的情形，可参考 V. V. Kozlov 的讨论[31].

由 Maupertuis-Jacobi 原理可以看出，一流形上 Hamilton 系统的可积性的研究在一定的条件下可转化为构形空间中测地线的可积性的研究，因此不妨直接讨论某一 Riemann 流形 M 上测地线的可积性. 关于这个方向有 2 个主要结果，其一是下面的定理：

定理 9.5 设 M 是一 n 维紧致的 Riemann 流形，且满足下列条件之一：

(1) $\dim M < \operatorname{rank} H_1(M,Z)$；

(2) 基本群 $\pi_1(M)$不含有限指标的交换子群，

那么 Σ^{2n-1}上的测地流不是完全可积的.

这里，测地流完全可积的概念可严格定义如下：

定义 9.1 n 维 Riemann 流形 M 上的测地流是完全可积的，当且仅当下面的条件成立：

(1) 在 M 的切丛 TM 上存在 $n-1$ 个光滑函数 $F_1,\cdots,F_{n-1}$，使得

$$(F_i,F_j)=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n-1;$$

(2) 在 M 的单位球面丛 Σ^{2n-1}上，函数 $F_1,\cdots,F_{n-1}$几乎处处函数独立；

(3) $F_1,\cdots,F_{n-1}$都是测地流的首次积分.

设 M 是 2 维 Riemann 流形 $\overline{M}$ 的一个有边子流形. $\Sigma^3\subset\overline{\Sigma}^3$ 是 M 上的单位球面丛：Σ^3 由 $\overline{\Sigma}^3$ 中所有满足 $\pi(z)\in M$ 的点组成，其中，$\pi:T\overline{M}\to\overline{M}$ 是自然投射. 则前文所提到的另一个主要结果是下面的定理：

定理 9.6 若存在一个子流形 $M\subset\overline{M}$ 是测地凸的，并且其 Euler 示性数小于 0，那么 $\overline{\Sigma}^3$ 中的测地流是不可积的. 进一步，在

$\Sigma^3 \subset \overline{\Sigma}^3$ 的任一邻域里都不存在测地流的光滑首次积分.

这里,M 测地凸指的是:$\overline{M}$ 中连接任意两个边界点 $x,y\in\partial M$ 的最短测地线都含于 M 中.

该定理的证明是由 Bolotin[48]根据 Kozlov 的想法[47]完成的,其基本思路是证明 M 的每一个非平凡的道路自由同伦类含有一个不稳定的闭测地线.

下面我们讨论具有 Newton 势的 2 个自由度的 Hamilton 系统的可积性问题.

定义 9.2 设 M 是 2 个自由度的自然 Hamilton 系统的(2 维)构形空间,$V:M\to R$ 是一个势能函数. 如果 V 除去有限个点 $x_1,\cdots,x_n\in M$ 外是一个解析函数,而在点 $x_i,i=1,2,\cdots,n$ 的邻域内有形式

$$V(x)=-\frac{f(x)}{\|x-x_i\|},\quad f(x_i)>0,$$

那么称 V 是一个 Newton 势,称 x_i 为 V 的奇点.

定理 9.7 设构形空间 M 是紧致的,并且 V 的奇点个数 $n>2\chi(M)$,那么在能量面 $E_c=\{(v,x)\in TM\,|\,H(v,x)=h\}$上,Hamilton 系统 $\dot{v}=\text{sgrad}\,H$ 没有解析首次积分,其中

$$h>\sup_{x\in M}V(x).$$

若 M 非紧致,则需要对动能加上一定的条件才能得到与上面定理 9.7 类似的结论.

定理 9.8 设 M 是某个自然 Hamilton 系统 $H=\frac{1}{2}\|v\|^2+V(x)$的非紧致构形空间. 假定 M 上的动能函数$\frac{1}{2}\|v\|^2$作为 M 上的 Riemann 度量满足条件:对于 ∂M 的任一连通分支 α,若 M 内部存在一条闭曲线 $\eta:[0,1]\to\text{Int}\,M$,使得当 η 连续地形变到 α 时 η 的长度趋于∞,那么若奇点个数 $n>2\chi(M)$,则 H 在能量面 $E_h(h>\sup\limits_{x\in M}V(x))$上无解析首次积分.

该定理的证明运用了 Riemann 曲面理论中的 Riemann-Hurwicz 公式以及前面的定理 9.7，详情参见参考文献[49].

现在考虑一个特殊而常见的情形：$M=R^2$，此时平面 n 体问题的 Hamilton 函数 H 有表达式

$$H(v,x)=\frac{1}{2}(v_1{}^2+v_2{}^2)+V(x), \tag{9.7}$$

其中，$(v_1,v_2)\in TR_x^2$，V 是熟知的引力势能：

$$V(x)=-\sum_{k=1}^{n}u_k|x-x_k|^{-1},\quad u_k>0.$$

定理 9.8 的一个推论是下面的重要断言：

推论 9.1 若 $n>2$，则系统(9.7)决定的 n 体问题是不可积的.

9.3 曲率涨落与 Hamilton 系统混沌

我们已经知道，许多 Hamilton 系统，特别是自然 Hamilton 系统，可以通过 Maupertuis-Jacobi 原理转化成构形空间上的一个 Riemann 几何，使得 Hamilton 系统的轨道成为相应 Riemann 流形上的测地线. 由 9.2 节知，当相应的 Riemann 流形上的曲率都为负值时，原 Hamitlon 系统的轨道对初值的依赖是敏感的，并且是不可积的. 但近几年来，许多学者[24]，尤其是物理学界的学者们，对 2 个自由度的 Hamilton 系统做了更深入的研究，特别对相应的 Riemann 流形上的曲率为正值时的情形做了不少工作. 通过大量的数值工作，他们揭示了(正)曲率的涨落同 Hamilton 系统混沌性的内在联系. 此外，理论工作表明[44]，曲率涨落是 Hamilton 系统轨道不稳定(混沌)的必要条件.

本节将就 2 个自由度的 Hamilton 系统的情形对此做一简单介绍，详细讨论可参阅有关文献. 下面先看几个例子：

对于形如 $W(x)(dx_1dx_1+dx_2dx_2)$的 Riemann 度量，由著名的 Gauss 曲率公式

$$K(x) = -\frac{1}{2W(x)}\triangle \log W(x) \tag{9.8}$$

可知，以 R^2 为构形空间的 Hamilton 系统 $H(x,v)=\frac{1}{2}(v_1{}^2+v_2{}^2)+V(x)$在可达构形空间 $Q_h=\{x\in R^2 \mid V(x)<h\}$上诱导的 Riemann 度量为 $2(h-V(x))(dx_1dx_1+dx_2dx_2)$. 于是该 Riemann 流形的曲率 $K(x)$满足

$$K(x) = \frac{1}{4(h-V(x))^3}[(h-V(x))\triangle V(x) + (\nabla V(x))^2],$$
$$x \in Q_h, \tag{9.9}$$

其中，△与▽分别是欧氏空间上的 Laplace 算子与梯度算子.

例 9.1 考虑 Hénon-Heiles 系统，其 Hamilton 函数为

$$H(x,v) = \frac{1}{2}(v_1{}^2 + v_2{}^2) + \frac{1}{2}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1{}^2x_2 - \frac{2}{3}x_2{}^3).$$

在由其诱导的 Riemann 流形 Q_h 上，Gauss 曲率为

$$K(x) = \frac{1}{4(h-V(x))^3} \times [2(h-V(x)) + (x_1+2x_1x_2)^2 + (x_2+x_1{}^2-x_2{}^2)^2].$$

显然，当 $x\in Q_h$ 时有

$$K(x) \geqslant \frac{1}{(h-V(x))^2} > 0.$$

数值工作表明，Hénon-Heiles 系统有混沌解.

例 9.2 考虑由经典 Yang-Mills 场导出的 Hamilton 系统，其 Hamilton 函数为[47]：

$$H(x,v) = \frac{1}{2}(v_1{}^2 + v_2{}^2) + \frac{x_1{}^2x_2{}^2}{2}.$$

其诱导的 Riemann 度量为

$$\mathrm{d}s = 2\left(h - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_2),$$

相应的 Gauss 曲率为

$$K(x) = \frac{1}{4\left(h - \frac{x_1^2 x_2^2}{2}\right)^3}\left[\left(h - \frac{x_1^2 x_2^2}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2)\right.$$
$$\left. + (x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2)^2\right].$$

显然，当 $x \in Q_h$ 时有

$$K(x) \geqslant 0,$$

等号仅当 $x=0$ 时成立.

例 9.3 同样，对于具有 Hamilton 函数

$$H(x,v) = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$
$$+ x_1^2 x_2 - \frac{1}{3}x_2^3$$
$$+ \frac{1}{2}x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^4$$
$$+ x_1^4 x_2 + \frac{2}{3}x_1^2 x_2^3 - \frac{1}{3}x_2^5$$
$$+ x_1^4 x_2^2 + \frac{1}{3}x_1^2 x_2^4 + \frac{11}{45}x_2^6$$

的 Toda 链，可以验证其所诱导的 Gauss 曲率 $K(x)$ 满足

$$K(x) \geqslant 0, \quad x \in Q_h.$$

考虑 Hamilton 系统

$$H = \frac{1}{2}\|v\|^2 + V(x),$$
$$(v,x) \in TR^2 = R^2 \times R^2.$$

易见，在相应的能量为 h 的构形空间上，Riemann 度量为

$$\mathrm{d}s^2 = 2(h - V(x))\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i,$$

Jacobi 场满足方程

$$\frac{\mathrm{D}^2 J}{\mathrm{d}s^2} + R(V, J)V = 0,$$

其中，$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}$表示对弧长的协变导数，$V=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$. 易见，弧长参数与时间参数满足关系式

$$\mathrm{d}s = \sqrt{2(h - V(x))}\mathrm{d}t.$$

为讨论方便，可取 $J(s)$为正常 Jacobi 场，于是可设

$$J(s) = Y(s)e(s),$$

其中，$e(s)$是与 $x(s)$垂直并且沿 $x(s)$平行移动的单位向量场. 将上式代入 Jacobi 方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y(s)}{\mathrm{d}s^2} + \Omega(s)Y(s) = 0, \tag{9.10}$$

其中，$\Omega(s)$是沿 $x(s)$的 Gauss 曲率，具体可表示为

$$\Omega(s) = \frac{\triangle V}{W^2} + \frac{(\nabla V)^2}{W^3}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2{}^2}}{W^2} + \frac{\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2\right]^2}{W^3}.$$

这里，$W=h-V(x)$.

当 $\Omega(s)$是 s 的周期函数时，即为熟知的 Hill 方程. 以下我们统称方程(9.10)为 Hill 方程. 由此可见，原 Hamilton 系统轨道稳定性的讨论就化为对(9.10)的解的有界性的讨论.

显然，当 $\Omega(s)<0$ 时，(9.10)有无界解. 所以，我们将讨论 $\Omega(s)>0$时的情形.

当 $\Omega(s)>0$ 是常数时，(9.10)的解是周期解，显然有界. 当 $\Omega(s)>0$非常数时，情况则非常复杂，解 $Y(s)$的有界性取决于$\Omega(s)$沿 $x(s)$的涨落，即沿 $x(s)$随着 s 的增长递减. 下面的简单命题指出了 $\Omega(s)$随着 s 的起伏涨落对(9.10)的解 $Y(s)$的无界性的重要性.

定理 9.9　设 $\Omega(s)\geqslant c>0$. 如果 $\Omega(s)$是单调函数，那么(9.10)的每一个解都是有界的.

证明　证明分两种情形：

(1) $\Omega'(s)\geqslant 0$，结论可以由参考文献[50]证明.

(2) $\Omega'(s)\leqslant 0$，此时考虑 Lyapunov 函数

$$V(s,Y,Y')=\Omega(s)Y^2+Y'^2,$$

于是 V 沿(9.10)的轨道的导数满足

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}&=\Omega'(s)Y^2+2\Omega(s)YY'-2\Omega(s)Y'Y''\\&=\Omega'(s)Y^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

由此知 $Y(s)$必有界.

对于 $\Omega(s)>0$ 不是单调的情形，方程(9.10)的非平凡解的有界与否是一个极富挑战性的问题. 即使 $\Omega(s)$是周期函数，情况也很复杂，这可由下面的定理看出来.

定理 9.10　考虑 Hill 方程

$$\begin{cases}Y''(s)+(a+\Omega(s))Y=0,\\ \Omega(s+\pi)=\Omega(s),\end{cases}\tag{9.11}$$

有如下断言：存在两个实数序列$\{a_0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\}$与$\{a_1^*\leqslant a_2^*\leqslant a_3^*\leqslant\cdots\}$，当 $k\to\infty$时，$a_k\to\infty$，$a_k^*\to\infty$，并且

$$a_0<a_1^*\leqslant a_2^*<a_1\leqslant a_2<a_3^*\leqslant a_4^*<a_3\leqslant a_4<\cdots,$$

使得(9.11)有最小周期为 π(或 2π)的周期解，当且仅当对于某个 $k\in N$(自然数集)有 $a=a_k$(或对于某个 $k\in N$，有 $a=a_k^*$). 进一步，方程(9.11)在区间

$$(a_0,a_1^*),\ (a_2^*,a_1),\ (a_2,a_3^*),\ (a_4^*,a_3),\ \cdots$$

上对应的解稳定(有界)，而在区间

$$(-\infty,a_0],\ (a_1^*,a_2^*),\ (a_1,a_2),\ (a_3^*,a_4^*),\ (a_3,a_4),\ \cdots$$

上方程(9.11)对应的解不稳定(无界).

意大利及美国的一些物理学家[23,24]讨论了曲率的平均值与

测地线的 Lyapunov 指数之间的关系，同本书中 Lyapunov 指数的严格定义不尽相同，他们的定义为

$$\lambda(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\ln \left\| \frac{Y(s)}{Y(0)} \right\|,$$

其中，$Y(s)$是沿测地线的 Jacobi 场方程的非零解.

就方程(9.11)(这也可以看作一个 Jacobi 方程)而言，他们断言(在数值工作的基础上)，若 $Y(s)$无界，则 Lyapunov 指数

$$\lambda(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\ln \left\| \frac{Y(s)}{Y(0)} \right\| \tag{9.12}$$

是一个正数. 当$a+\Omega(s)\leqslant c<0$时，显然可以严格证明此事实. 但当 $a+\Omega(s)>0$ 时，如何从数学角度证明(9.12)是正数还是其它什么数是一个悬而未决的问题. 此外，这些学者通过数值计算所得到的结论同已有的具体方程的严格数学分析有很大差异. 由于计算机在处理混沌动力系统时不像处理“规则”系统那么有效，所以数值计算的可靠性本身也是一个问题. 因此，从理论上弄清楚(9.11)的解的有界性与 $\Omega(s)$的关系以及相应的 Lyapunov 指数的正负性，对于从几何角度研究自然 Hamilton 系统的可积性与混沌有着十分重要的意义.

参考文献

[1] 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义. 北京：北京大学出版社，1983.

[2] 李继彬，赵晓华，刘正荣. 广义哈密顿系统理论及应用. 北京：科学出版社，1994.

[3] 张筑生. 微分拓扑讲义. 北京：北京大学出版社，1996.

[4] 伍鸿熙，沈纯理，虞言林. 黎曼几何初步. 北京：北京大学出版社，1989.

[5] 徐森林，薛春华. 流形. 北京：高等教育出版社，1991.

[6] M. A. Armstrong 著，孙以丰译. 基础拓扑学. 北京：北京大学出版社，1983.

[7] S. Akbulut, L. Taylor. A topological resolution theorem. *Publ. Math. I. H. S.*, **53**(1981), 163—169.

[8] S. Albulut, H. C. King. Real algebraic structures on topological spaces. *Publ. Math. I. H. S.*, **53**(1981), 79—162.

[9] R. Abraham, J. E. Marsdem. Foundation of michamics. Benjamin, 2nd, 1978.

[10] V. I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. Springer-Verlag, 1978.

[11] G. D. Birkhoff. Dynamical systems. *Amer. Math. Soc. Colloc. Publ.*, **9**(1927).

[12] S. Bleher, E. Ott, C. Grebogi. Routes to chaotic scattering. *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 919—922.

[13] A. V. Bolsinov, S. V. Matveev, A. T. Fomenko. Topological classification of intergrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom, a list of system of small complexity. *Uspekho Mat. Nauk*, **45**(1990), 49—77.

[14] A. V. Bolsinov, H. R. Dullin, A. Witte. Topology of energy surfaces and existence of transversal Poincaré section. *J. Phys. A: Math.*

Gen., **29**(1996), 4977—4985.

[15] R. Bott. Non-degenerate critical manifolds. *Ann. of Math.*, **60** (1954), 248—261.

[16] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov. Modern geometry-methods and applications, Part Ⅰ. Springer-Verlag, 1985.

[17] A. T. Fomenko, H. Zieschang. A topological infariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two dgrees of freedom. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **54**(1990), 546—575.

[18] A. T. Fomenko. The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstruction to integrability. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **50**(1986), 1276—1307.

[19] A. T. Fomenko. Topological invariant of Hamiltonian systems in Liouville sense, *Functional Anal. and its Appl.*, **22**(1988), 38—51.

[20] A. T. Fomenko. Integrability an nonintegrability in Geometry and Mechanics. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[21] A. T. Fomenko, A. T. Zieschang. On the topology of three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **294**(1987), 283—287.

[22] A. T. Fomenko. Morse theory of integrable Hamiltonian systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **287**(1986), 1071—1075.

[23] L. Casetti, C. Clementi, M. Pettini. *Phys. Rev.*, E **54**(1996), 59—69.

[24] H. E. Kandrup. Geometric interpretation of chaos in two-dimensional Hamiltonian systems. *Phy. Rev.*, E **56**(1997), 2722—2732.

[25] Golstein. Classical Mechanics. Addison-Wesley, Reading, 1950.

[26] H. Hotelling. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **26**(1925), 329.

[27] H. Hotelling. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27**(1926), 479.

[28] M. Hirsch. Differential topology. *G. N. T.*, **33**. Springer-Verlag, 1976.

[29] W. Jaco. Lectures on three-manifold to pology. *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.*, **43**(1980).

[30] W. Kaplan. Topology of the two-body problem. *Amer. Math. Monthly.*, **49**(1942), 316—323.

[31] V. V. Kozlov. Integrable and non-integrable Hamiltonian systems. *Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys.*, **8**(1989), 1—81.

[32] A. G. Kusnirenko. Problems in the general theory of dynamical systems on a manifold. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **116**(1981).

[33] W. S. Massey. Algebraic topology; an introduction. Springer-Verlay, 1977.

[34] S. V. Matveev, A. T. Fomenko, V. V. Sharko. Round Morse functions and isoenergy surfaces of integrable Hamiltonian systems. *Math. USSR Sbornik*, **63**(1989), 319—336.

[35] A. A. Oshemkov. Topology of constant-energy surfaces and of bifurcation diagrams of integrable cases of rigid body dynamics on $SO(4)$. *Uspekhi Mat. Nauk*, **42** (1987), 199—200.

[36] H. Osborn. Vector bundles. Academic Press, 1982.

[37] J. Palis, Jr. Weliagton de Melo. Geometric theory of dynamical systems. Springer-Verlay, 1982.

[38] H. Poincaré. Les Methods Nouvellse de Mécanique Céleste. Gauthier-Villars, 1892.

[39] John W. Morgan. Nonsingular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds, *Topology*, **18**(1979), 41—53.

[40] Shigeaki Miyoshi. Foliated round surgery of codimension-one foliated manifolds, *Topology*, **21**(1982), 241—265.

[41] S. Smale. Differential dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**(1967), 747—817.

[42] S. Smale. Topology and mechanics, I. *Invent. Math.*, **10**(1970).

[43] S. Smale. Topology and mechanics, II. *Invent. Math.*, **11**(1970).

[44] Xiao-Song Yang. Fluctuation of curvature and instability of Hamiltonian systems, submitted.

[45] Xiao-Song Yang. Topology of singular fiber bundles. *Expo. Math.*, **17**(1999), 275—282.

[46] Xiao-Song Yang. On topological classification of singuler fiber bundles with 2-D base space. *Expo. Math.* ,**17**(1999),359—364

[47] V. V. Kozlov. Topological obstacles to integrability of natural mechanical systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **249** (1979), 1299 — 1320.

[48] S. V. Bolotin. Non-integrability of n-center problem with $n>2$. *Vestnik Mosk. Un-ta, ser. matem-mekhan*, **3**(1984),65—68.

[49] S. V. Bolotin. Influence of singularities of potential energy on integrability of mechanical systems, *Prikl. Mat. Mekh.*, **48**(1984), 356—362.

[50] R. Bellman. Stability theory of differential equations. Mc-Graw-Hill, 1960.

[51] Yang Xiaosong *et. al*, Toplogical obstruction to existence of global Poincaré section. *Math. Appl.* ,**12**(1999) 72—75.

[52] Xiao-Song Yang. A remark on global Poincaré section and suspension manifold. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2000, to appear.